补充：系统结构图

对于离散因果系统的差分方程,画出实现该系统的结构框图.

$$y(n)-\tfrac{3}{4}y(n-1)+\tfrac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\tfrac{1}{3}x(n-1)$$

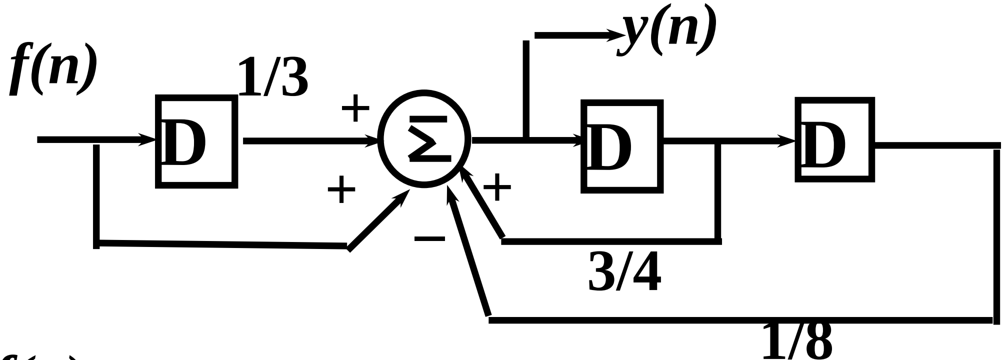
解:取Z变换

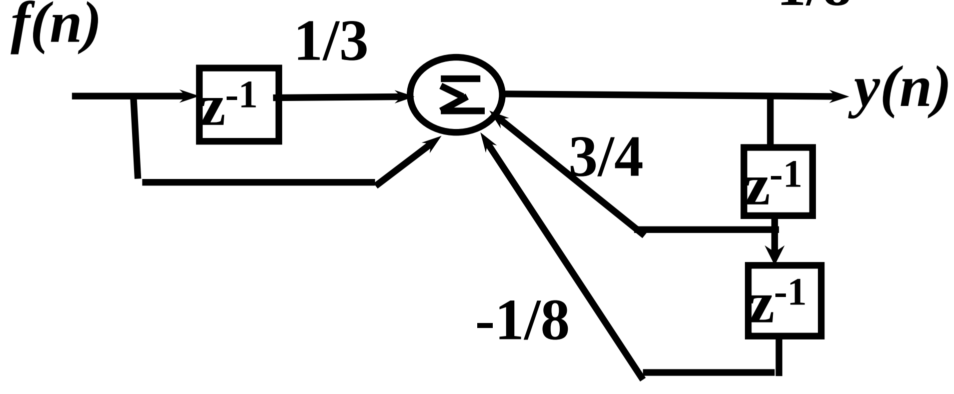
$$Y(z)-\tfrac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\tfrac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\tfrac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

系统函数为:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

实现该系统的结构框图为





若令 $$H(z)=H_1(z)H_2(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$H_1(z)=\frac{W(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} \qquad H_2(z)=\frac{Y(z)}{W(z)}=1+\frac{1}{3}z^{-1}$$

这样

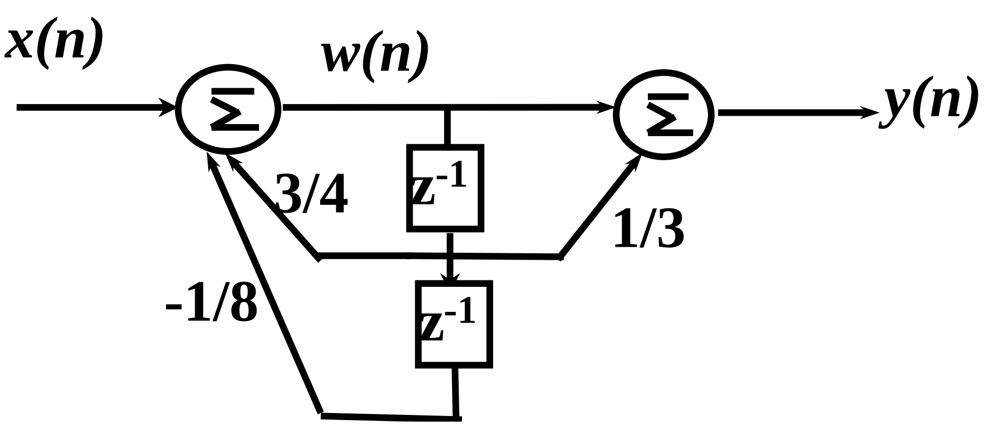
$$W(z)=\frac{X(z)}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$W(z)=X(z)+\frac{3}{4}z^{-1}W(z)-\frac{1}{8}z^{-2}W(z)$$

$$Y(z)=W(z)(1+\frac{1}{3}z^{-1})$$

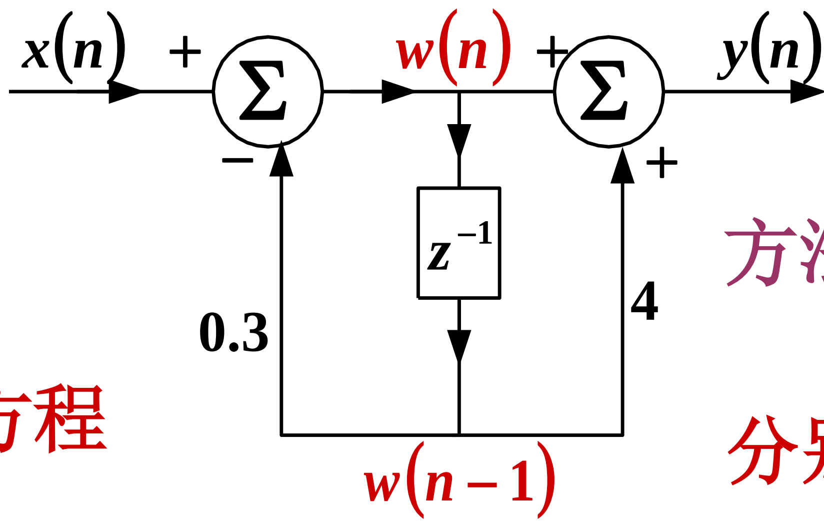
得到简化的结构框图.

节省一个延时器Z^{-1}.



简化的结构图

Ex: 系统框图如下，求$H(z),h(n)$



解：

列差分方程

方法：设中间序列$w(n)$

分别取z变换

$$\therefore H(z)=\frac{Y(z)}{W(z)}\cdot\frac{W(z)}{X(z)}=\frac{1+4z^{-1}}{1+0.3z^{-1}}=\frac{z+4}{z+0.3}=\frac{40}{3}-\frac{37}{3}\frac{z}{z+0.3}$$

$$\therefore h(n)=\frac{40}{3}\delta(n)-\frac{37}{3}(-0.3)^n u(n)=\delta(n)-\frac{37}{3}(-0.3)^n u(n-1)$$

Ex: 已知$H(z)=\dfrac{z+4}{z+0.3}$，列出系统的差分方程

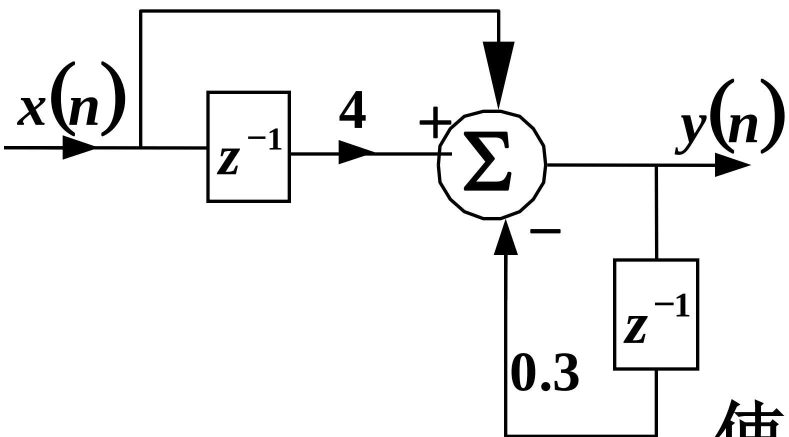
解： 分子分母同除以z的最高次幂

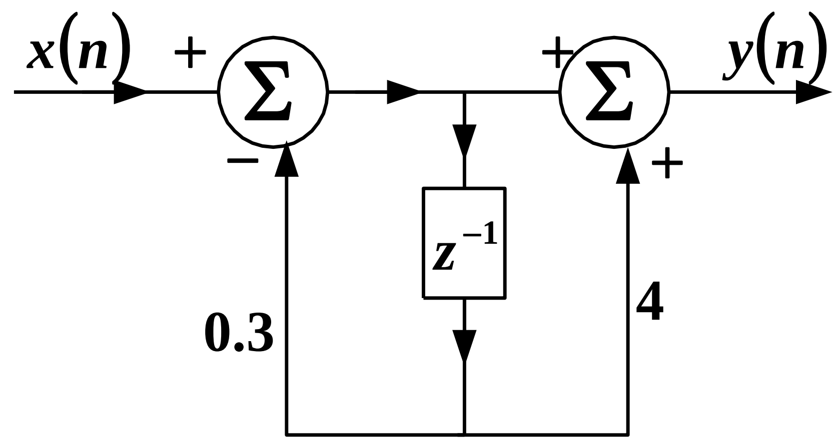
$$H(z)=\frac{1+4z^{-1}}{1+0.3z^{-1}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\therefore Y(z)+0.3z^{-1}Y(z)=X(z)+4z^{-1}X(z)$$

$$\therefore\ y(n)+0.3y(n-1)=x(n)+4x(n-1)$$

画出系统的框图为：





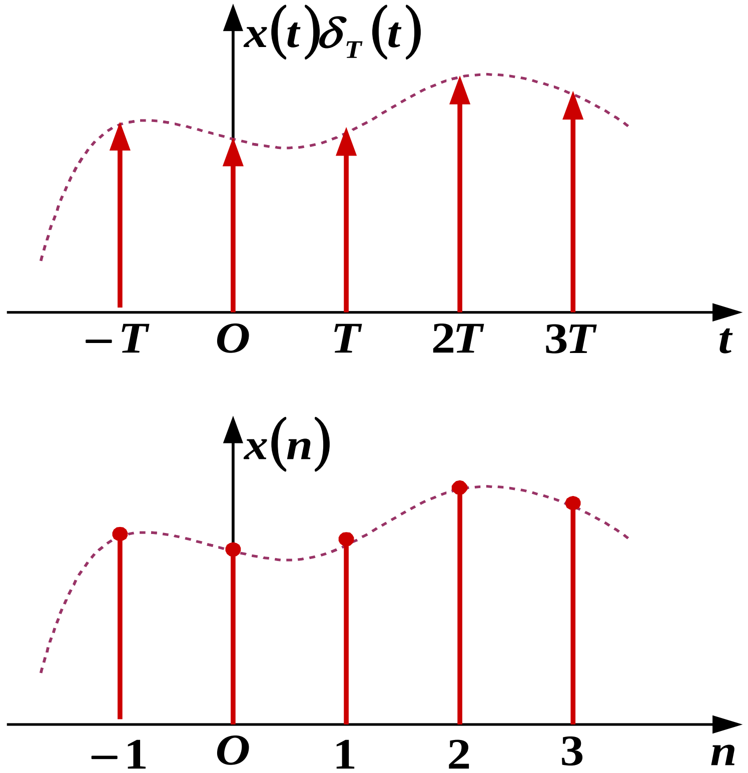
使用多个加法器节省了延时单元。

§6.8 序列的傅里叶变换（DTFT)

（离散时间傅立叶变换， DTFT ）

(Discrete Time Fourier Transform)

目的：研究离散时间系统的频率响应。

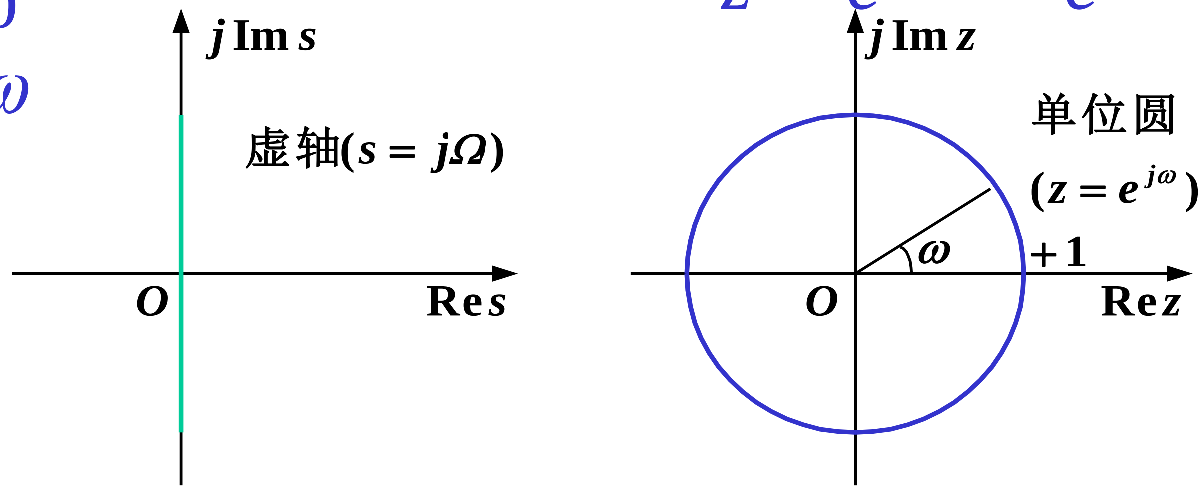


一．定义（离散时间傅立叶变换，DTFT）

$\sigma = 0$

$s = j\omega$

$$z = e^{sT} = e^{j\omega T} \overset{T=1}{=} e^{j\omega}$$



令 $z = e^{j\omega}$，$|z| = 1$，即单位圆上的z变换：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

周期为2π

DTFT与z变换之关系

由LT、ZT导出$DTFT$

拉氏变换$X_s(s)=\mathcal{L}\{x_s(t)\}$

$$X_s(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot e^{-snT} \xrightarrow[nT\to n]{e^{sT}=z,}$$

z变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot z^{-n}$$

$s = j\Omega$

$\Omega T=\omega$

$nT\to n$

$z = e^{j\omega}$

序列$x(n)$的傅氏变换

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\cdot e^{-jn\omega}$$

离散信号FT、LT分析的默许条件：满足采样定理。

序列的
傅立叶正变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

序列的傅立叶反变换(IDTFT)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi\ j} \oint_{|z|=1} X(z)z^{n-1}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}e^{-j\omega}d(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}e^{-j\omega}je^{j\omega}d\omega$$

序列
的傅立叶
逆变换

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega$$

序列x(n)的离散时间傅立变换对DTFT，IDTFT

$$X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = IDTFT[X(e^{j\omega})]$$

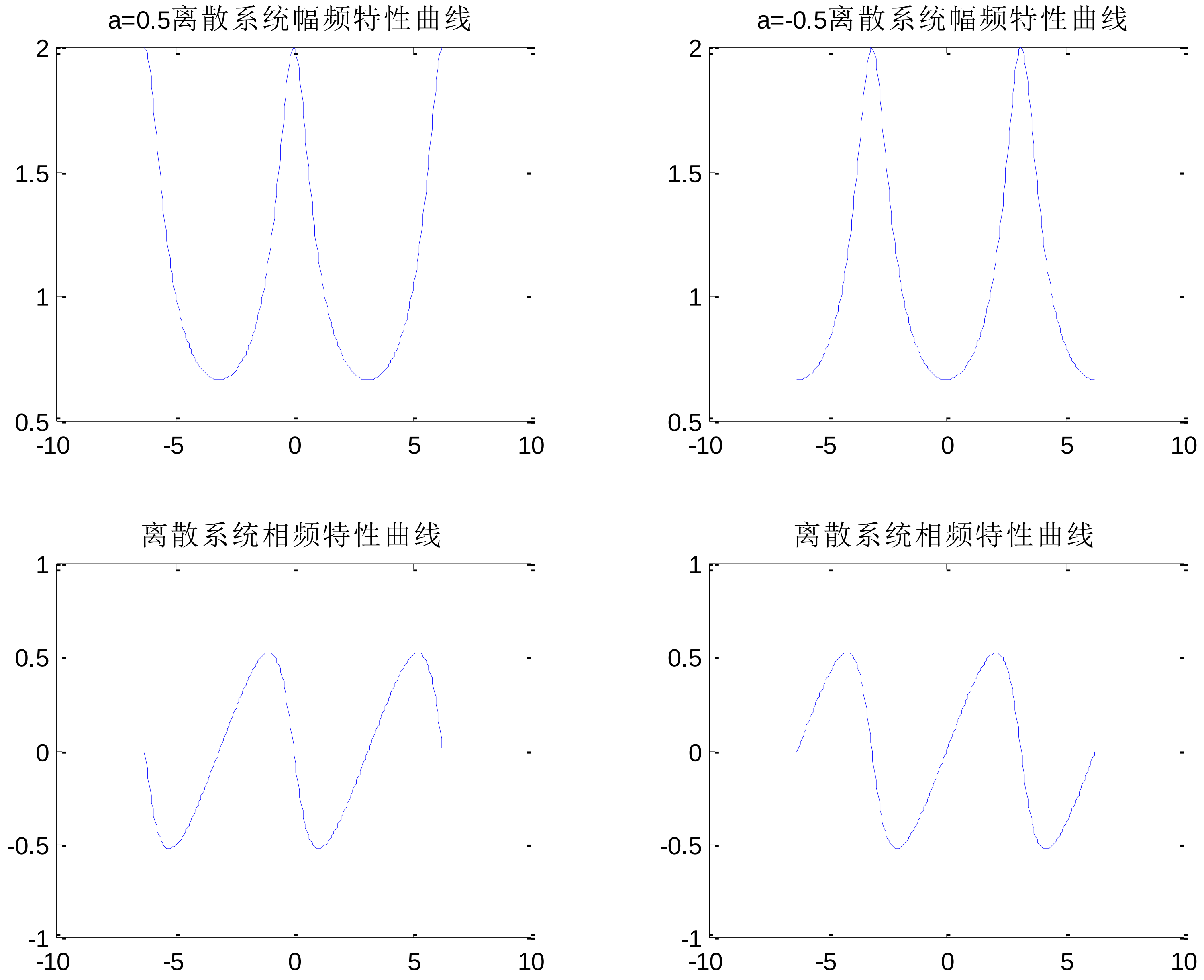
例1：求 $a^n u(n) \qquad |a|<1$ **的DTFT。**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

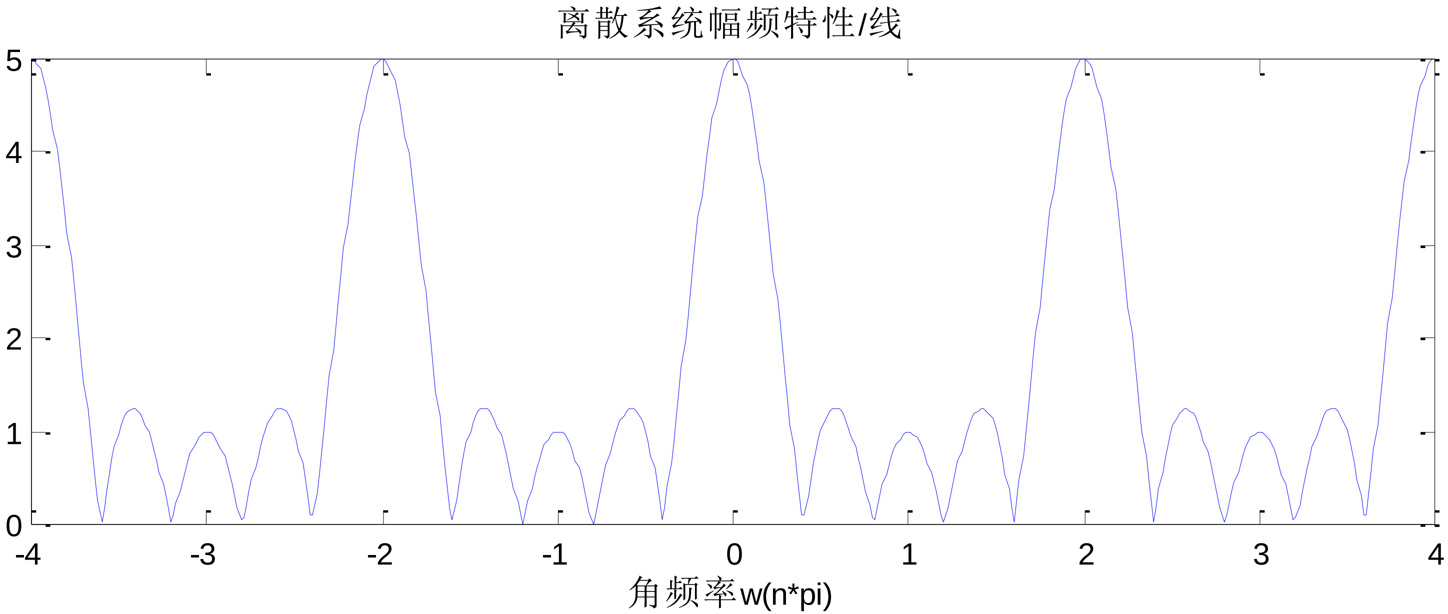
$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

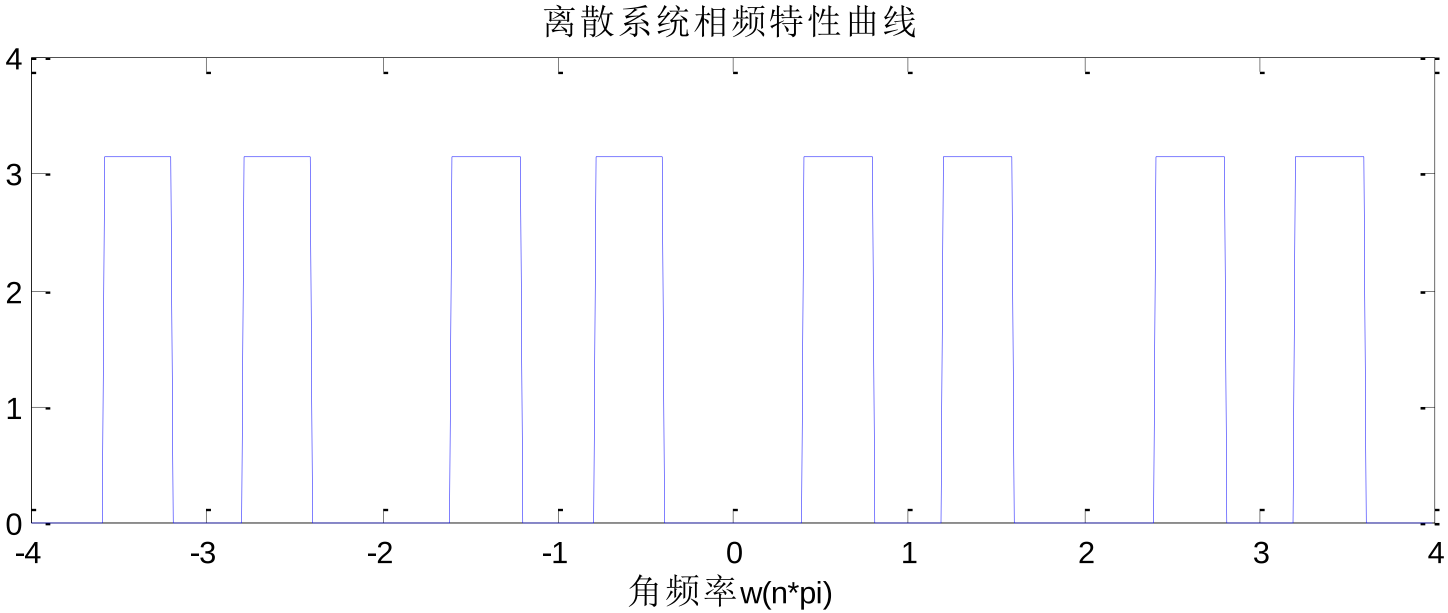
例2：求 $x(n) = \begin{cases} 1 & |n| \le 2 \\ 0 & |n| > 2 \end{cases}$ **的DTFT。**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-2}^{2} e^{-j\omega n} = \frac{\sin[2.5\omega]}{\sin[0.5\omega]} = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$



a=0.5离散系统幅频特性曲线
a=-0.5离散系统幅频特性曲线
离散系统相频特性曲线
离散系统相频特性曲线
2
1.5
1
0.5
-10
-5
0
5
10
-0.5
-1

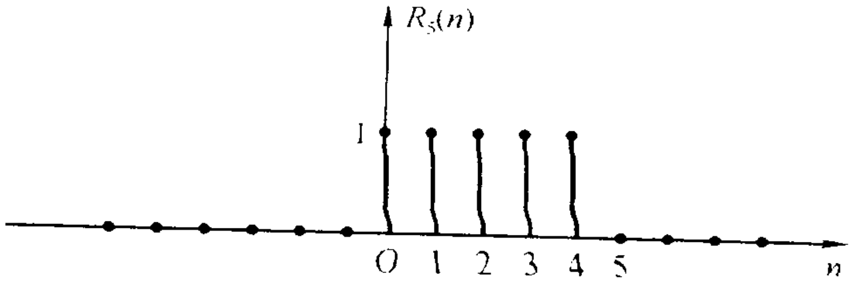

离散系统幅频特性/线
5
4
3
2
1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
角频率w(n*pi)

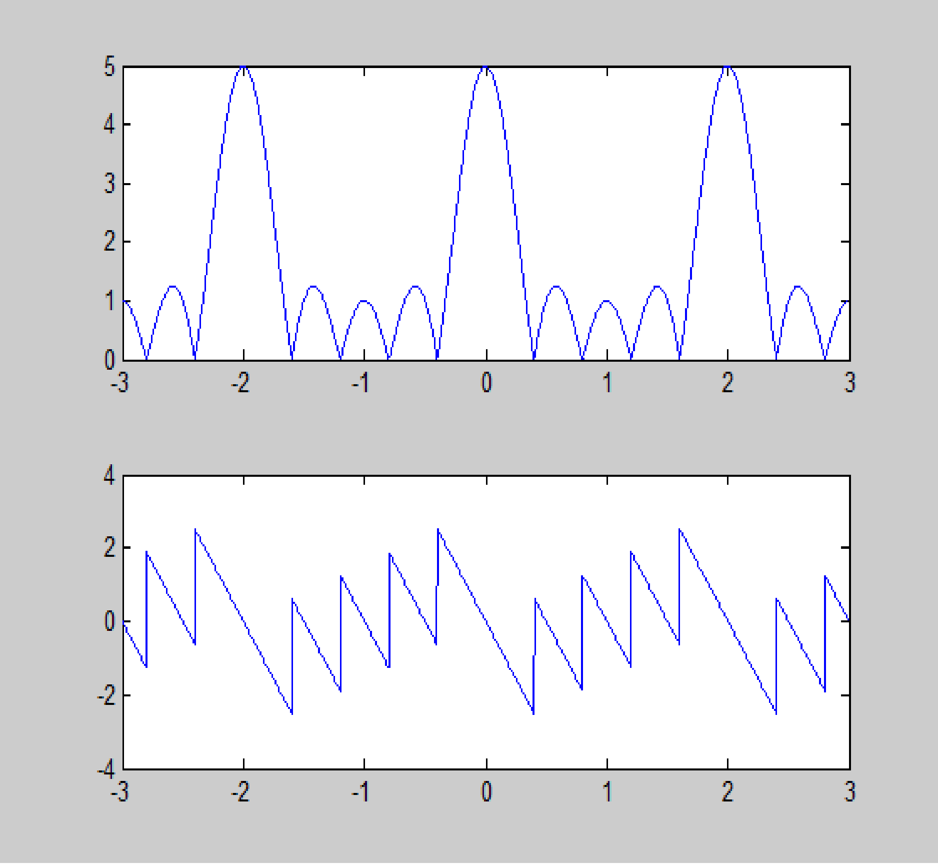

离散系统相频特性曲线
4
3
2
1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
角频率w(n*pi)

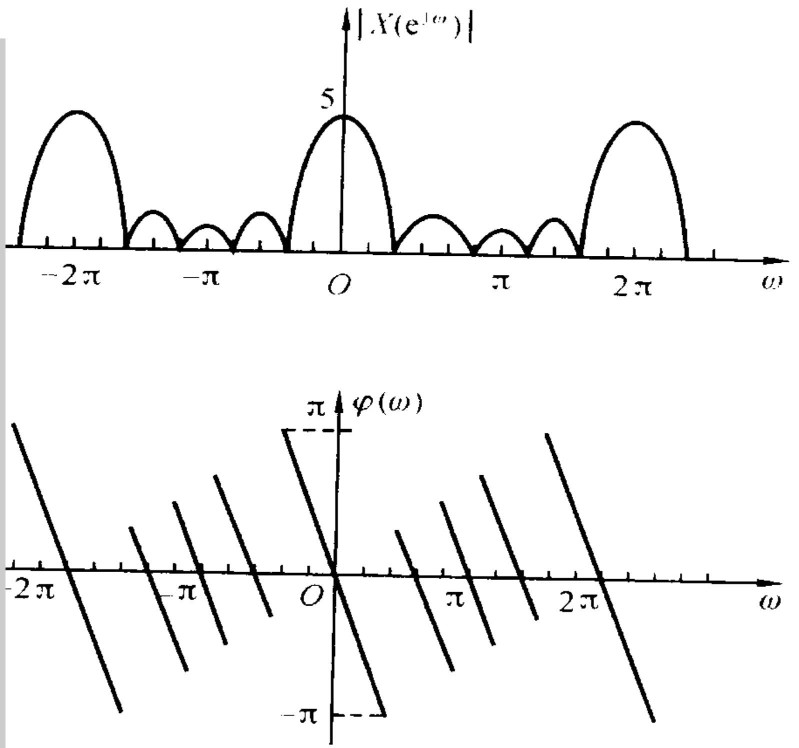
$$DTFT[R_5(n)] = \sum_{0}^{4} e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j2\omega}\frac{\sin[2.5\omega]}{\sin[0.5\omega]}$$

$$= \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$







二．傅氏变换、拉氏变换、*z*变换的关系

1. 三种变换的比较

2. 频率的比较

3. *s*平面虚轴上的拉氏变换即为傅氏变换

4. *z*平面单位圆上的*z*变换即为序列的傅氏变换（DTFT）

1 连续信号和离散序列的傅立叶变换的比较

- 连续

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 离散

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

傅立叶变换的各种形式

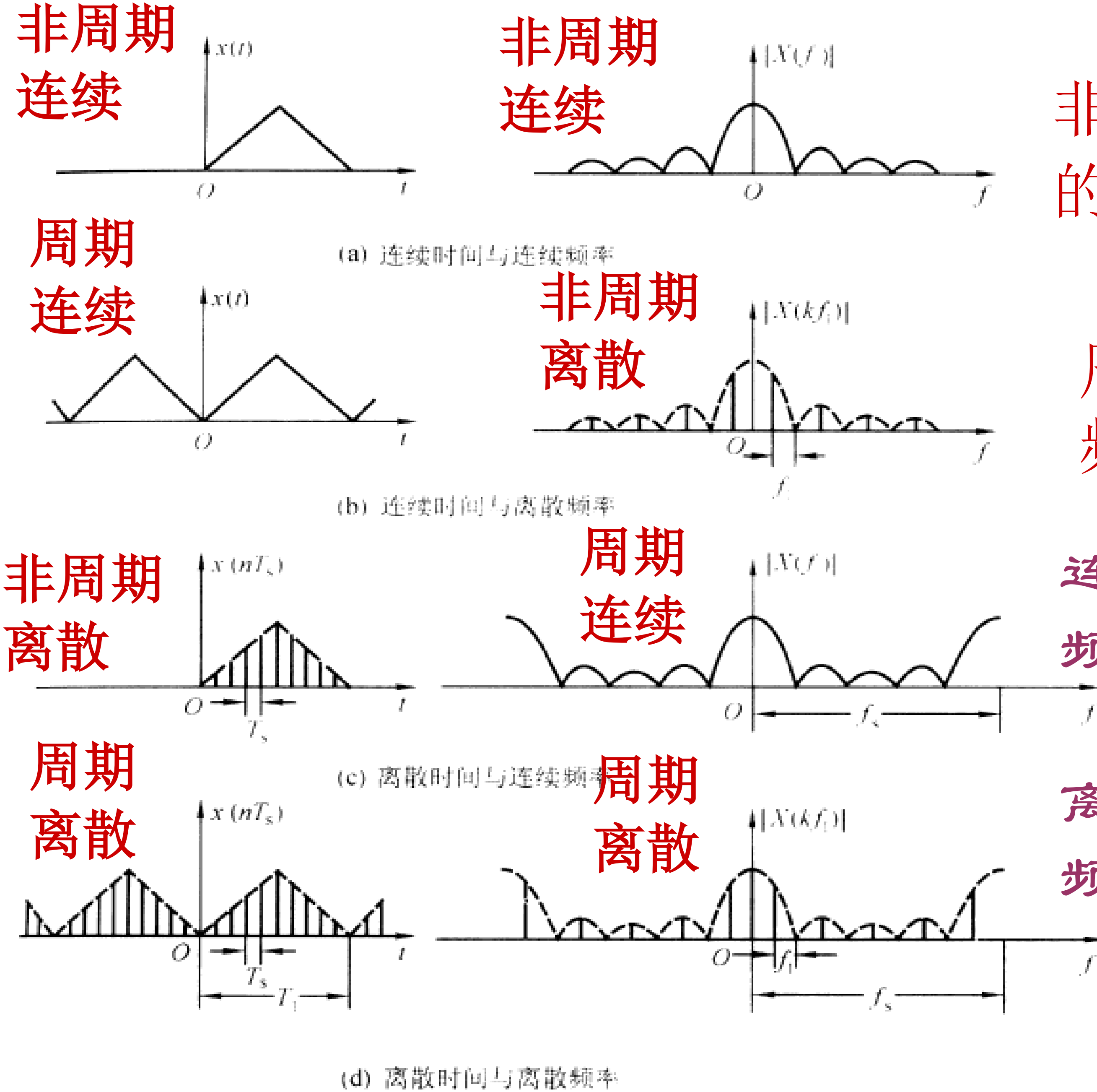


图 9－1　傅里叶变换的各种形式

非周期信号的频谱连续；

周期信号的频谱离散；

连续信号的频谱非周期；

离散信号的频谱是周期的

2. 三种变换的比较

变换名称	傅里叶变换		拉普拉斯变换	z 变换
信号类型	$x(t)$	$x(n)$	连续信号 $x(t)$	离散信号 $x(nT)$
变量	$j\Omega$	$e^{j\omega}$	$s=\sigma+j\Omega$	$z=e^{sT}$

3．模拟频率与数字频率

模拟角频率 Ω，量纲：弧度/秒；

数字角频率 ω，量纲：弧度；

$e^{j\omega}$ 是周期为 2π 的周期函数

关系：$\omega = \Omega T$

z 是复变量：

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\Omega)T}$$

$$= re^{j\theta}$$

$$\therefore \; r = e^{\sigma T}$$

$\theta = \Omega T$，即是数字频率 ω。

4. s平面虚轴上的拉氏变换即为傅氏变换

$$\sigma = 0, \ s = j\Omega$$

$$H(j\Omega) = H(s)\big|_{s=j\Omega}$$

5. z平面单位圆上的z变换即为序列的傅氏变换（DTFT）

$|z| = 1$, $z = e^{j\omega}$，此处$\omega = \Omega T$是数字频率，同前述θ。

$$X(j\omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

§6.8 离散系统的频率响应

一、什么是离散系统的频率响应？

定义一：单位样值响应的傅立叶变换

定义二：离散系统在正弦序列作用下的稳态响应

二、系统的频率响应的几何确定

定义一：系统频率响应即系统单位样值函数的傅立叶变换

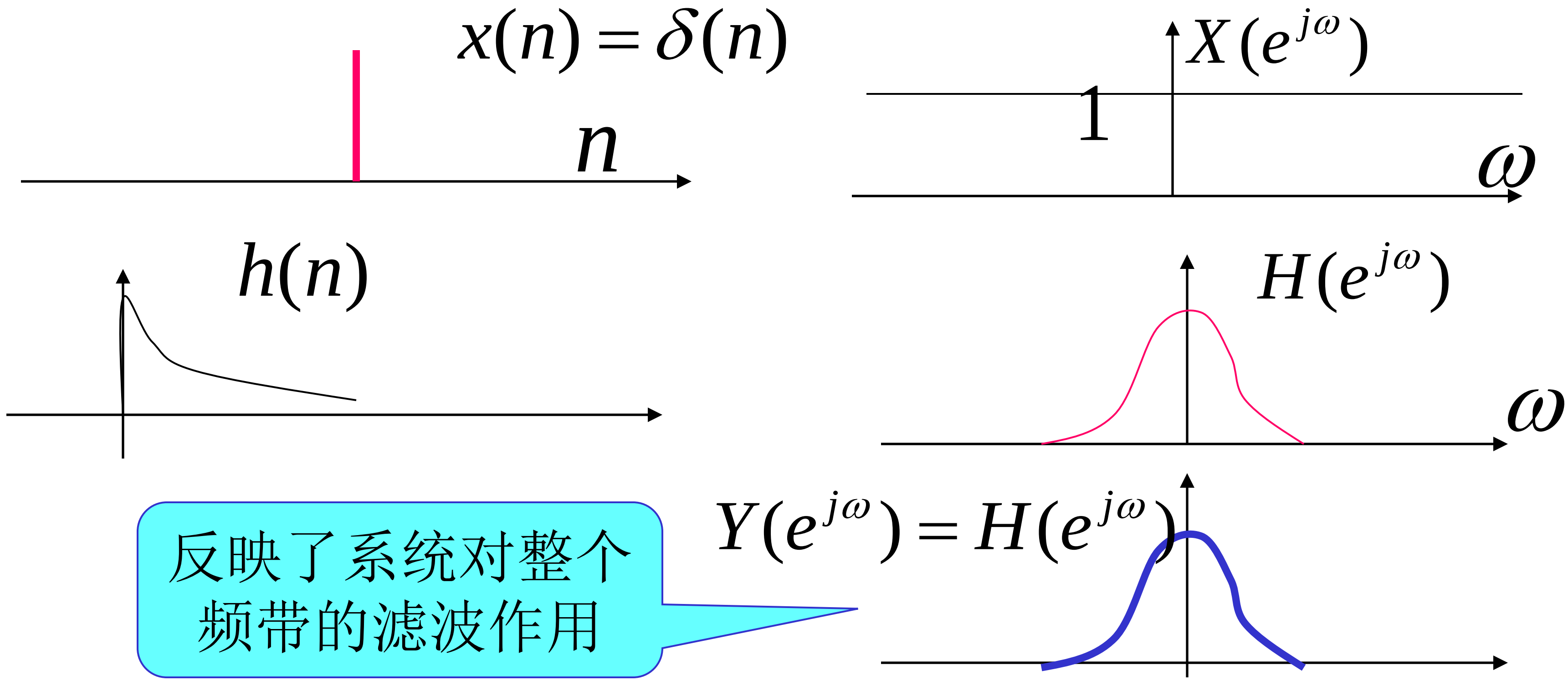
$$\delta(n) \Rightarrow \boxed{h(n)} \Rightarrow \delta(n) * h(n) = r(n) = h(n)$$

- 当**h(n)**已知时，下列表达式表示系统频率响应函数，

$$H(e^{j\omega}) = FT[h(n) * \delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

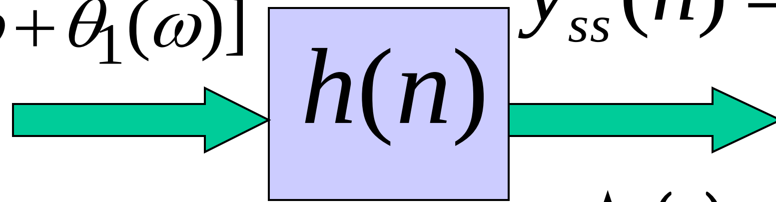
- $H(e^{j\omega})$是以 **h(n)** 为加权系数，对各次谐波进行加权或改变的情况（物理意义）。

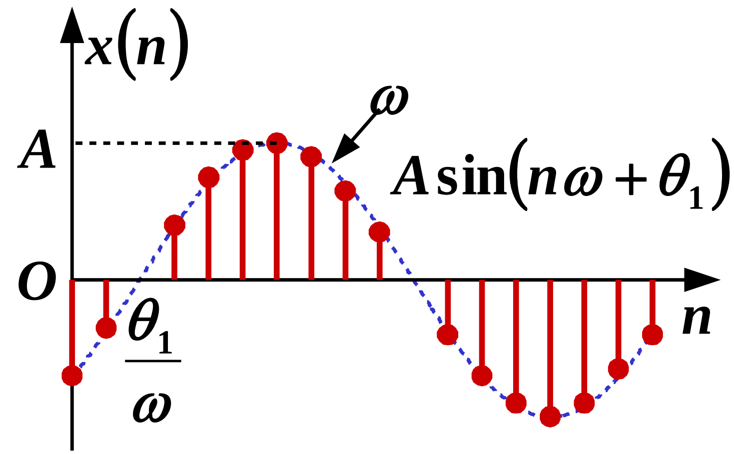
- 系统的激励是$\delta(n)$时，它的频谱覆盖了的 $-\infty \le \omega \le \infty$ 范围
- 系统的单位样值响应 $h(n)$ 可以看成对各次谐波的滤波的总效果



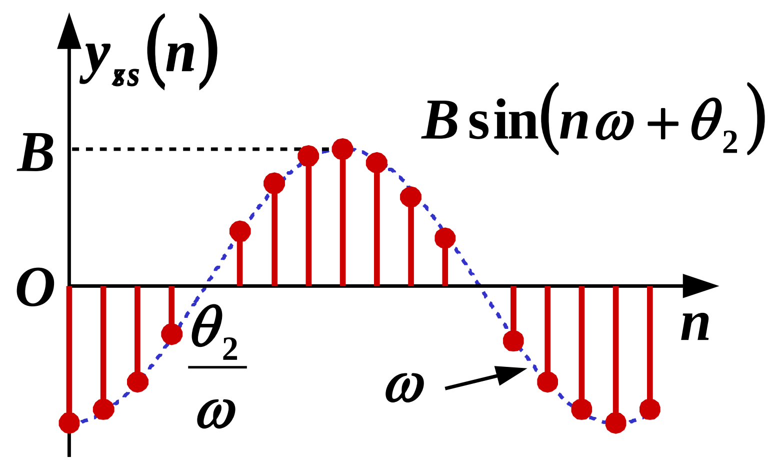
定义二：正弦序列输入下系统的稳态响应

$$x(n) = A\sin[n\omega + \theta_1(\omega)] \qquad y_{ss}(n) = B\sin[n\omega + \theta_2(\omega)]$$





正弦稳态响应：系统在正弦序列作用下的稳态响应



频率响应：系统对不同频率的输入，产生不同的加权。

由系统函数得到频响特性

离散时间系统在单位圆上的z变换即为傅氏变换，是系统的频率响应特性：

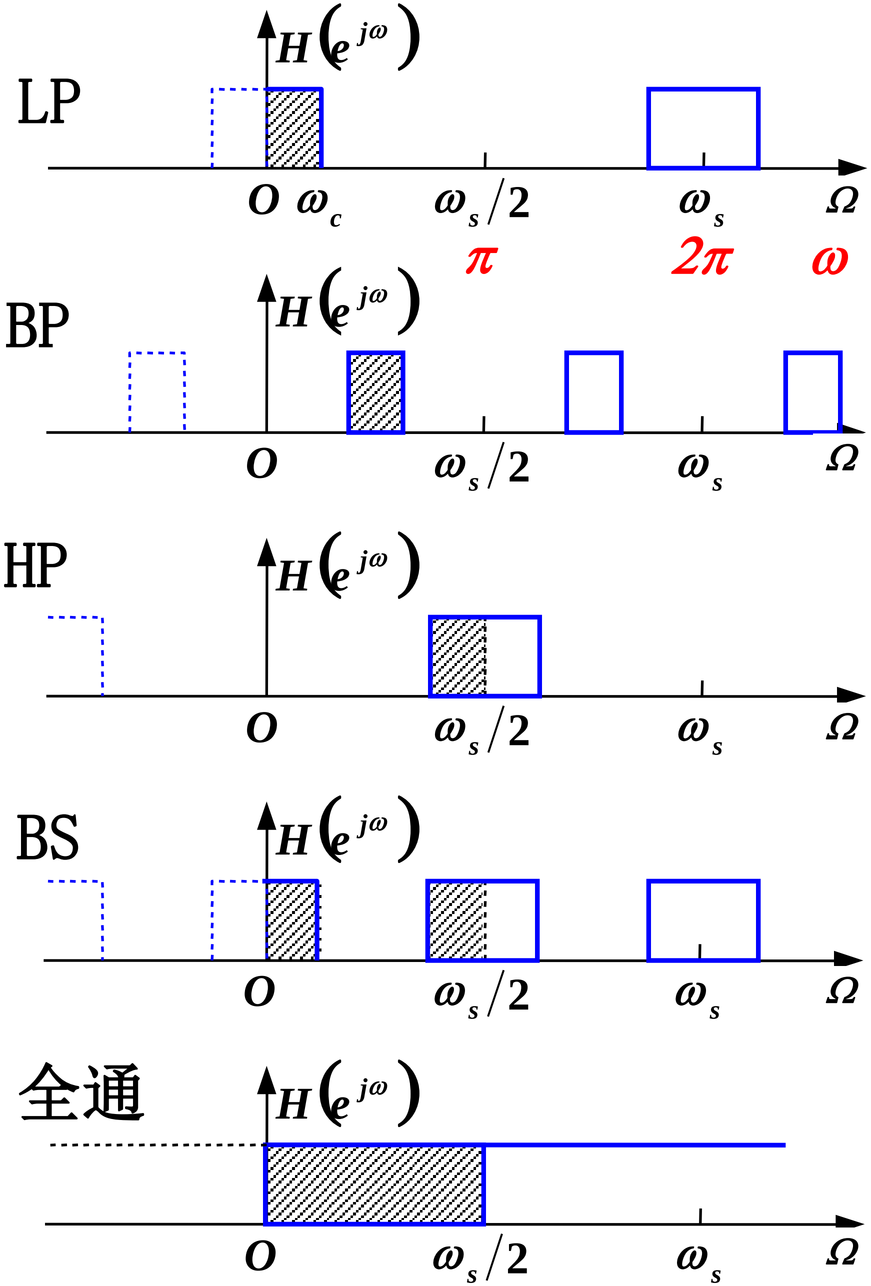
$$H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\sim\omega$：幅频特性，输出与输入序列的幅度之比

$\varphi(\omega)\sim\omega$：相频特性，输出对输入序列的相移

- $H\left(e^{j\omega}\right)$是$h(n)$的$DTFT$；
- $e^{j\omega}$为周期函数，所以$H\left(e^{j\omega}\right)$为周期函数，其周期为$2\pi$。

离散系统（数字滤波器）的频响



说明：

1) 周期性：$\omega = \Omega T = \Omega \frac{2\pi}{\omega_S}$

$e^{j\omega}$ 与 $H(e^{j\omega})$ 的周期均为 2π

$H(e^{j\omega})$ 是 $H(\omega)$ 的周期重复

2) ω_S 为采样频率，$\Omega_{max} = \dfrac{\omega_S}{2}$

为最高无混叠频率

3) 归一化：ω_S 所对应的数字频率是 2π

二. 频响特性的几何确定法

$$H(z)=\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

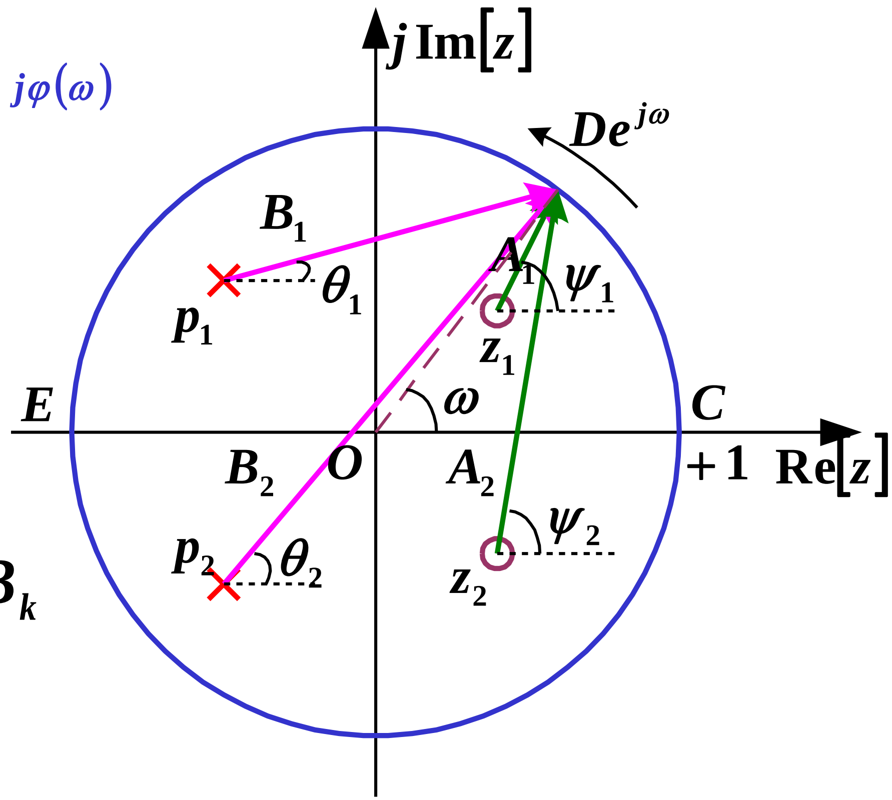
$$H(s)=\frac{\prod_{r=1}^{M}(s-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(s-p_k)}\overset{s=j\omega}{=}\frac{\prod_{r=1}^{M}(j\omega-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(j\omega-p_k)}$$

演示

$$H(e^{j\omega})=\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

令 $e^{j\omega}-z_r=A_r e^{j\psi_r}$

$$e^{j\omega}-p_k=B_k e^{j\theta_k}$$



幅频响应：$\left|H(e^{j\omega})\right|=\prod_{r=1}^{M}A_r\Big/\prod_{k=1}^{N}B_k$

相位响应：$\varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k$

由几何法可以看出：

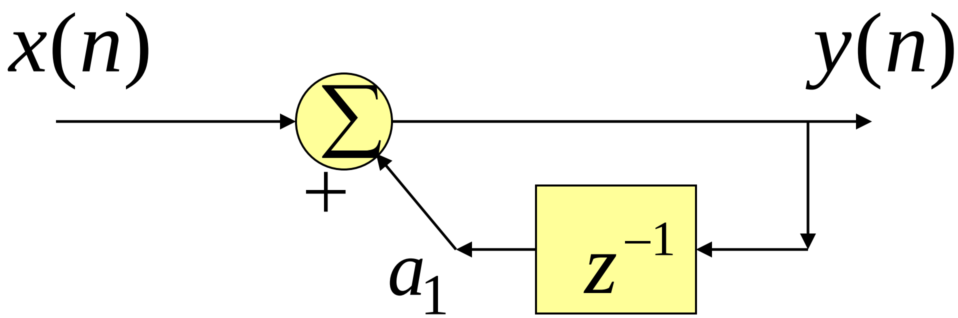
（1）z=0处的零极点对幅频特性$\left|H(e^{j\omega})\right|$没有影响，因为模＝1，只对相位有影响

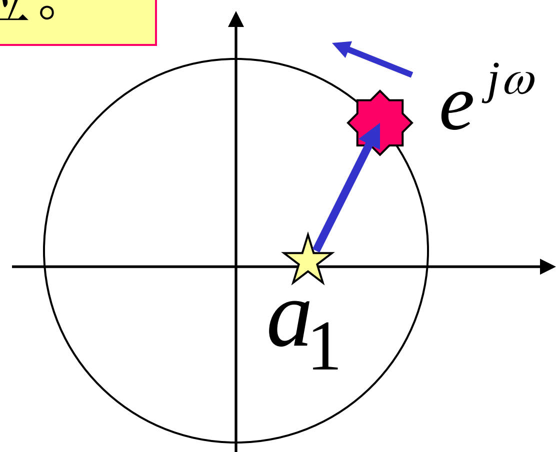
（2）当$e^{j\omega}$旋转到某个极点p_i附近时，例如在同一半径上时，B_i较短，则$\left|H(e^{j\omega})\right|$在该点应当出现一个峰值，$B_i$越短，$p_i$附近越尖锐。若$p_i$落在单位圆上，则

$B_i = 0$，则p_i处的峰值趋于无穷大。

（3）对于零点则其作用与极点的作用正好相反。

例：求图示的一阶因果稳定系统的频率响应。





解：差分方程为：$y(n) = a_1 y(n-1) + x(n) \qquad (0 < a_1 < 1)$

演示

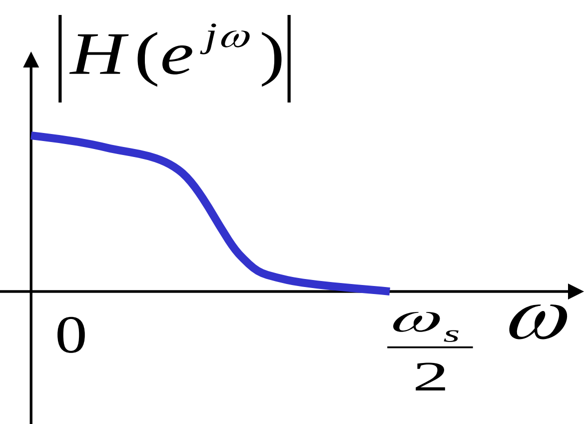
$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{z}{z - a_1} \qquad \therefore h(n) = a_1^n u(n)$$

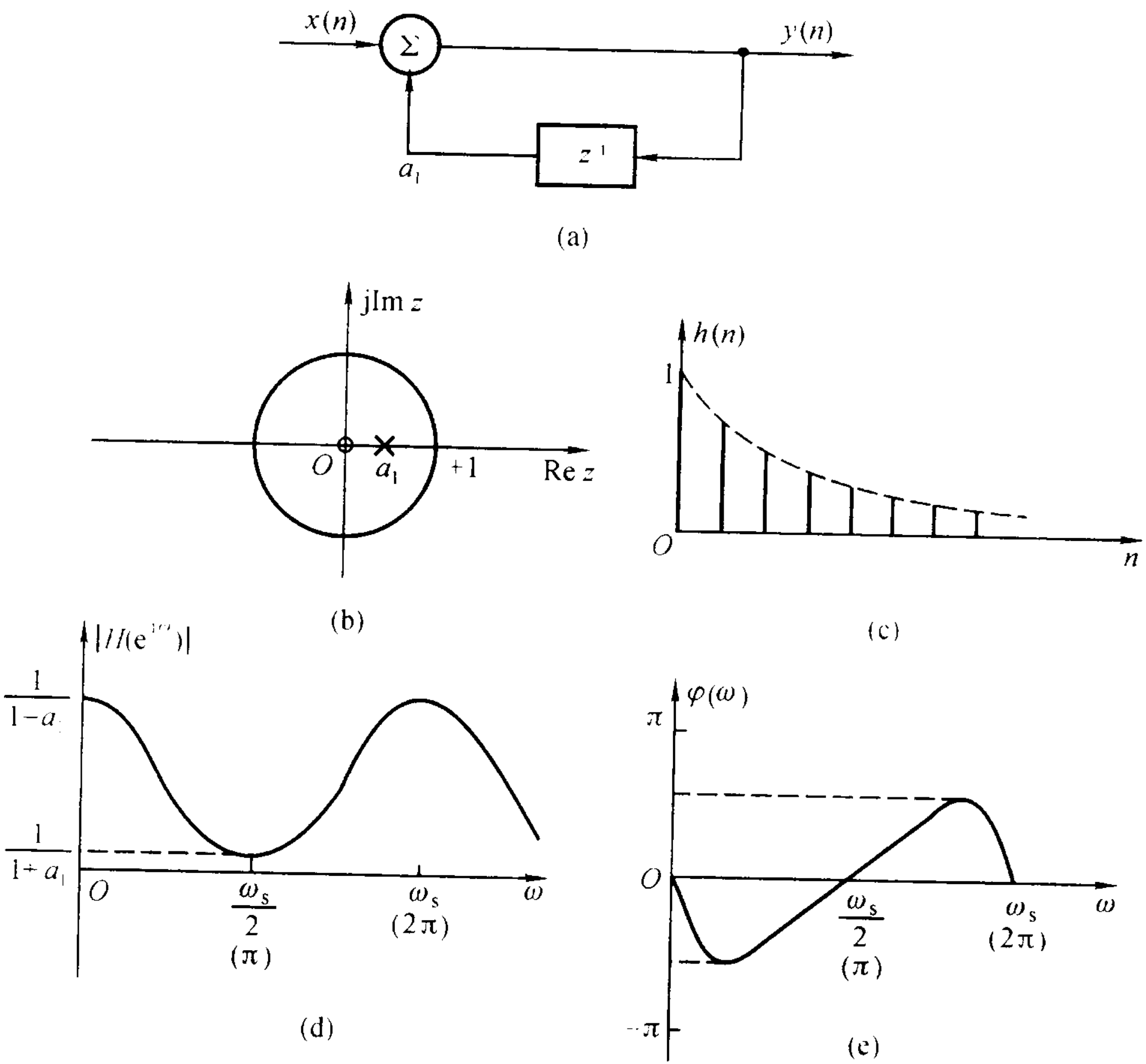
频响为：$H(e^{j\omega}) = \dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a_1} = \dfrac{1}{(1 - a_1 \cos\omega) + j a_1 \sin\omega}$

演示

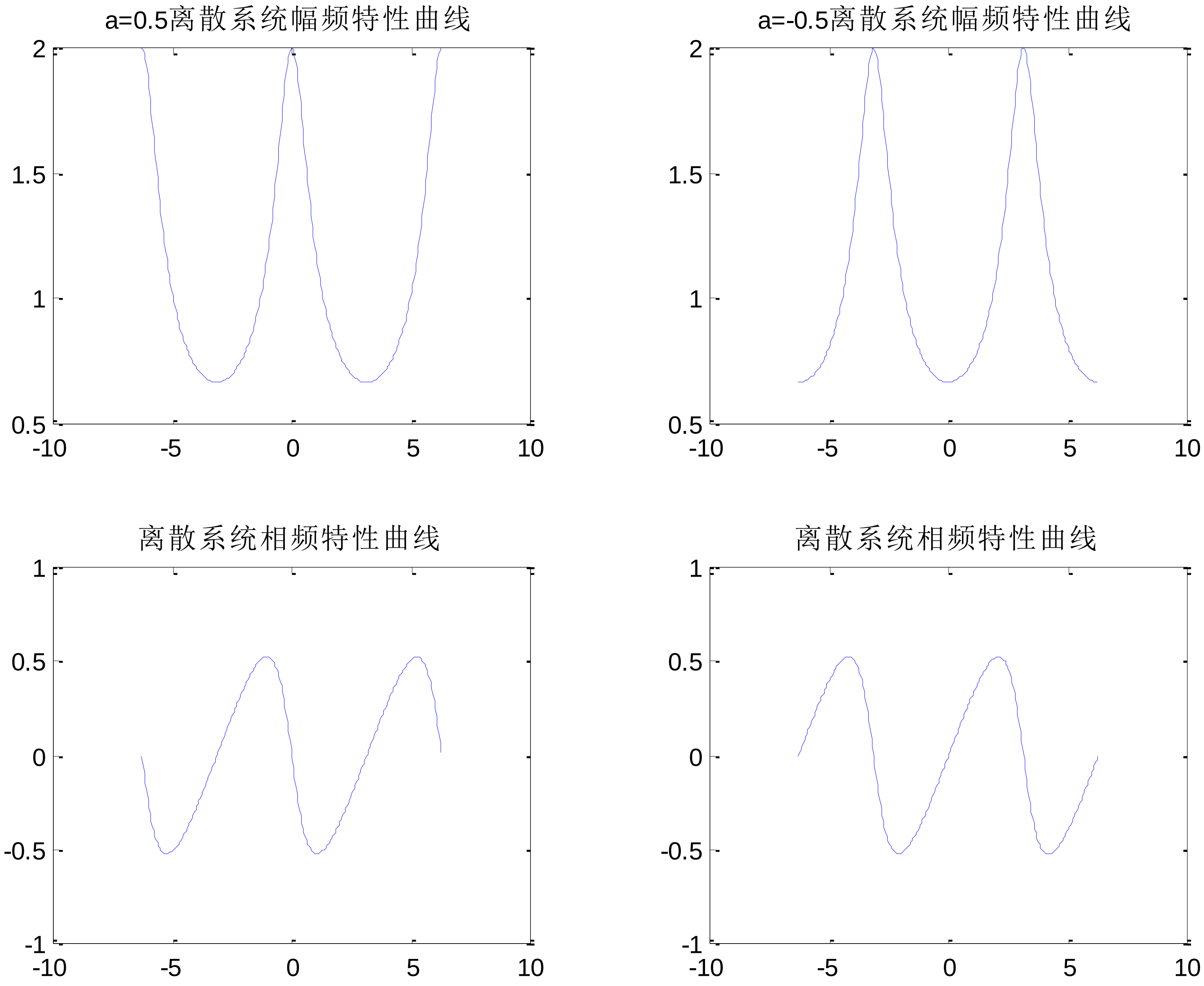
$\therefore$ 幅频响应：$\left|H(e^{j\omega})\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos\omega}}$

相频响应为：$\varphi(\omega) = -arctg\left(\dfrac{a_1 \sin\omega}{1 - a_1 \cos\omega}\right)$





x(n)
Σ
y(n)
z⁻¹
a₁
(a)
jIm z
O
a₁
+1
Re z
(b)
h(n)
1
O
n
(c)
|H(e^{jω})|
1/(1−a₁)
1/(1+a₁)
O
ω_s/2
(π)
ω_s
(2π)
ω
(d)
φ(ω)
π
O
ω_s/2
(π)
ω_s
(2π)
ω
−π
(e)


a=0.5离散系统幅频特性曲线
a=-0.5离散系统幅频特性曲线
离散系统相频特性曲线
离散系统相频特性曲线
2
1.5
1
0.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-10
-5
0
5
10

例 已知离散系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{6(z-1)}{4z+1} \qquad |z|>\frac{1}{4}$$

求系统的频率响应，粗略画出系统的幅频响应和相频响应曲线。

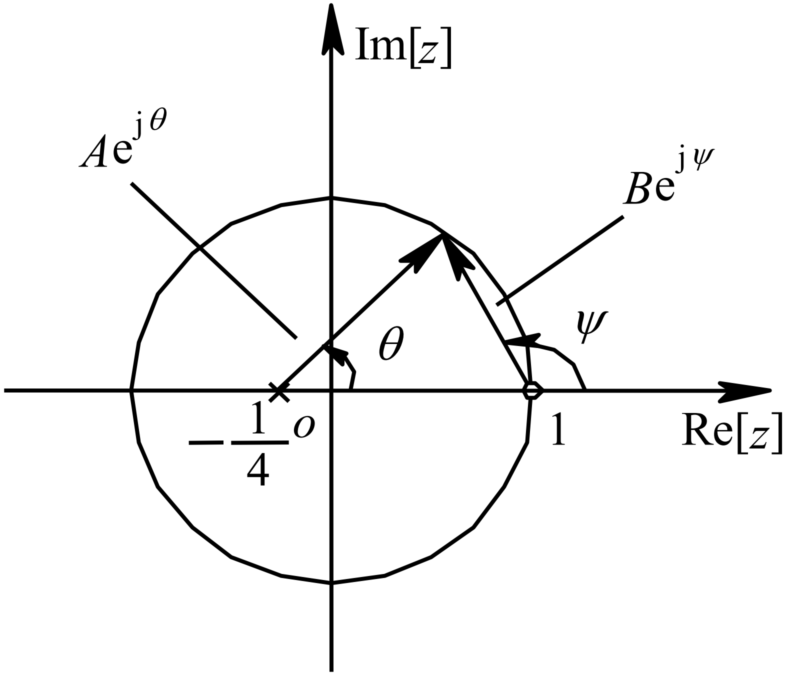
解 由于H（z）的收敛域为 $|z|>\frac{1}{4}$，所以H（z）在单位圆上收敛。H（z）有一个极点 $p_1=-\frac{1}{4}$，有一个零点z_1=1。系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{3}{2}\left[\frac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}-\left(\frac{1}{4}\right)}\right]$$

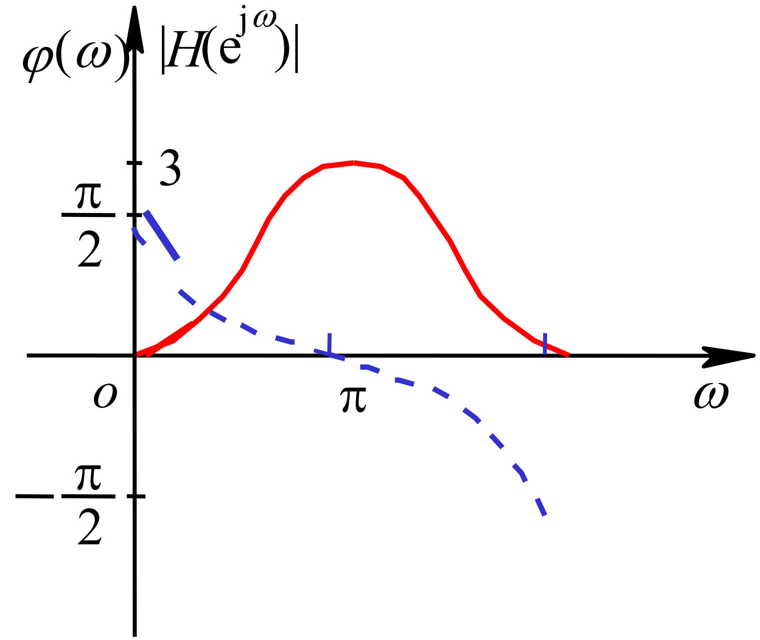
$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{3}{2}\left[\frac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}-\left(\frac{1}{4}\right)}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{Be^{j\psi}}{Ae^{j\theta}} = \left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

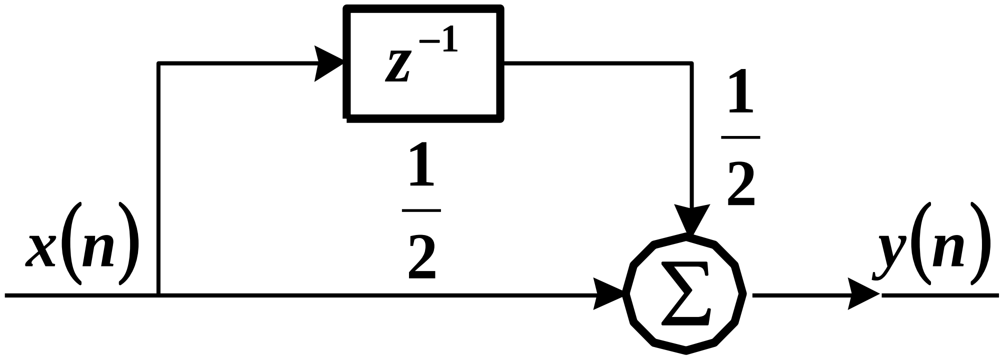
$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{3B}{2A} \qquad \varphi(\omega) = \psi - \theta$$



高通



Ex: 已知离散时间系统的框图如右图，求系统频率响应特性。



解：

系统的差分方程

$$y(n) = 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$$

设系统为零状态的，方程两边取z变换

$$Y(z) = 0.5X(z) + 0.5z^{-1}X(z)$$

系统函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0.5 + 0.5z^{-1}$$

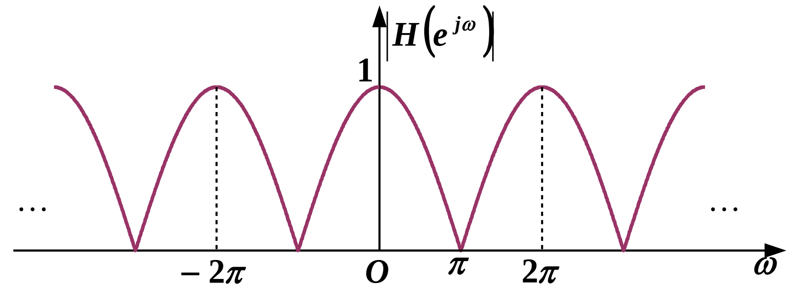
系统的频率响应特性

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

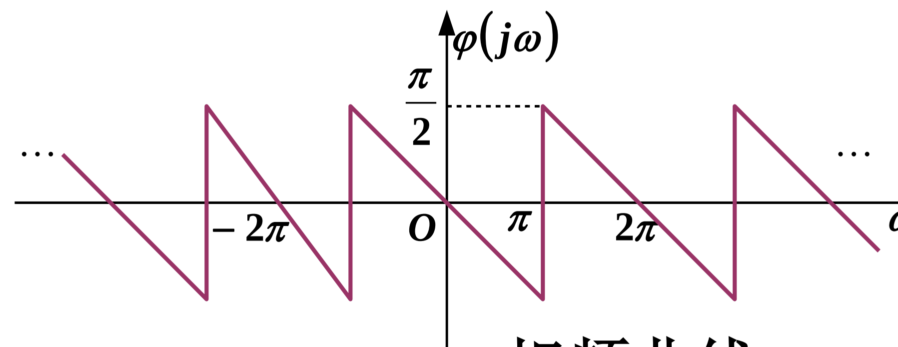
$$=0.5\left(1+e^{-j\omega}\right)$$

$$=0.5e^{-j\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}+e^{-j\frac{\omega}{2}}}{2}\cdot 2$$

$$=\cos\frac{\omega}{2}\cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}$$



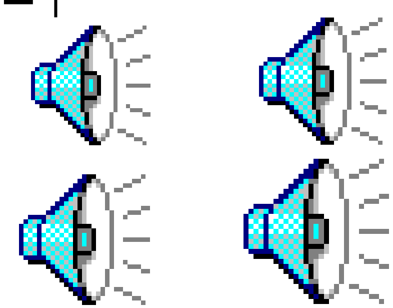
幅频特性曲线



相频曲线

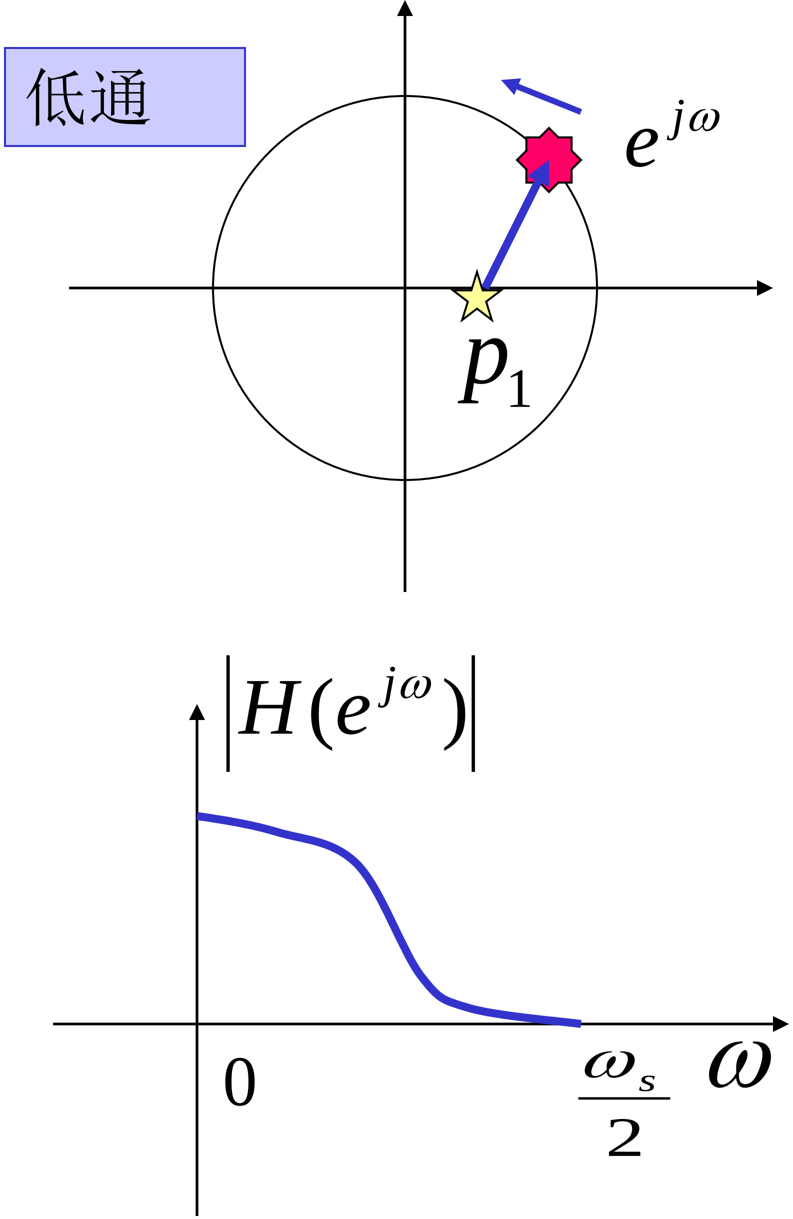
幅频特性 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|\cos\frac{\omega}{2}\right|$

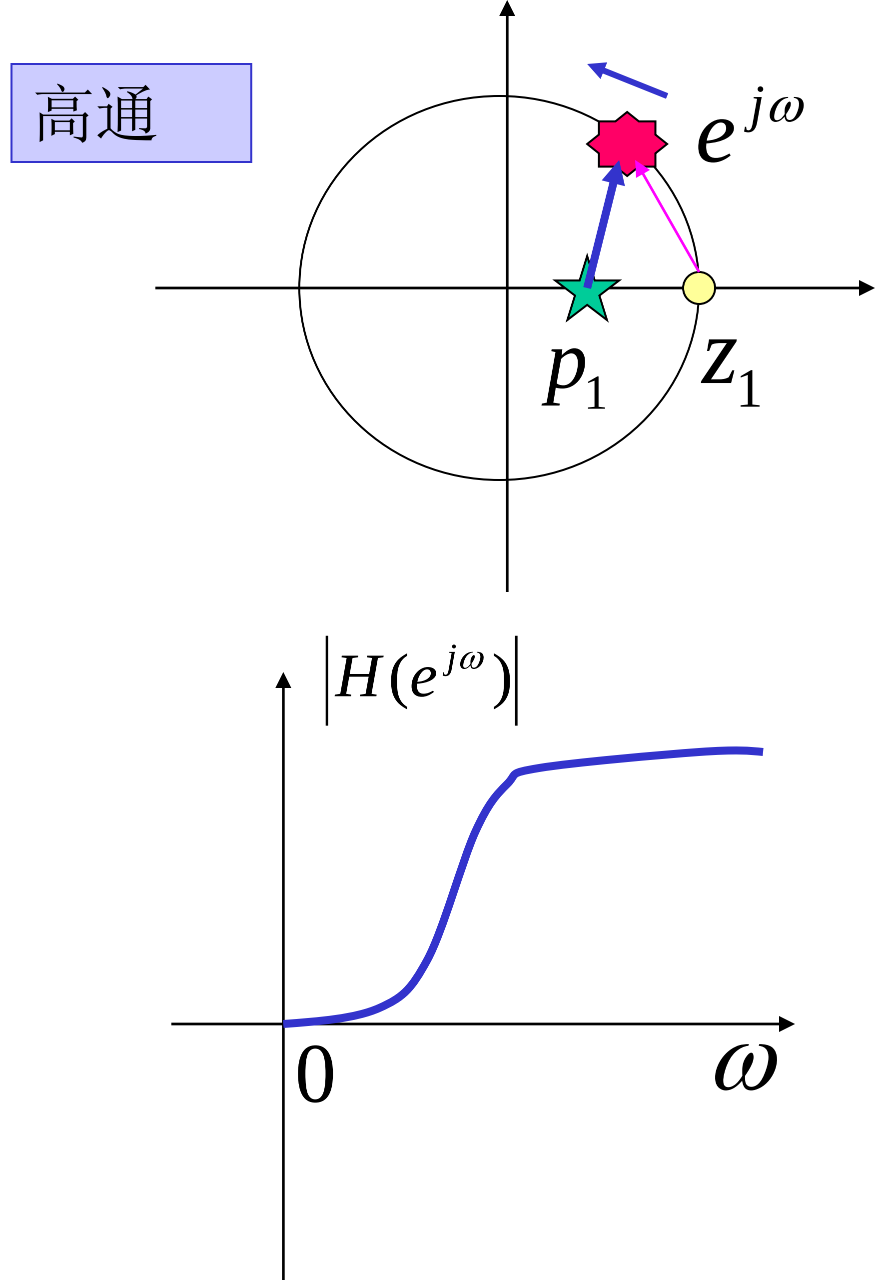
相频特性 $\varphi(\omega)=-\frac{\omega}{2}$

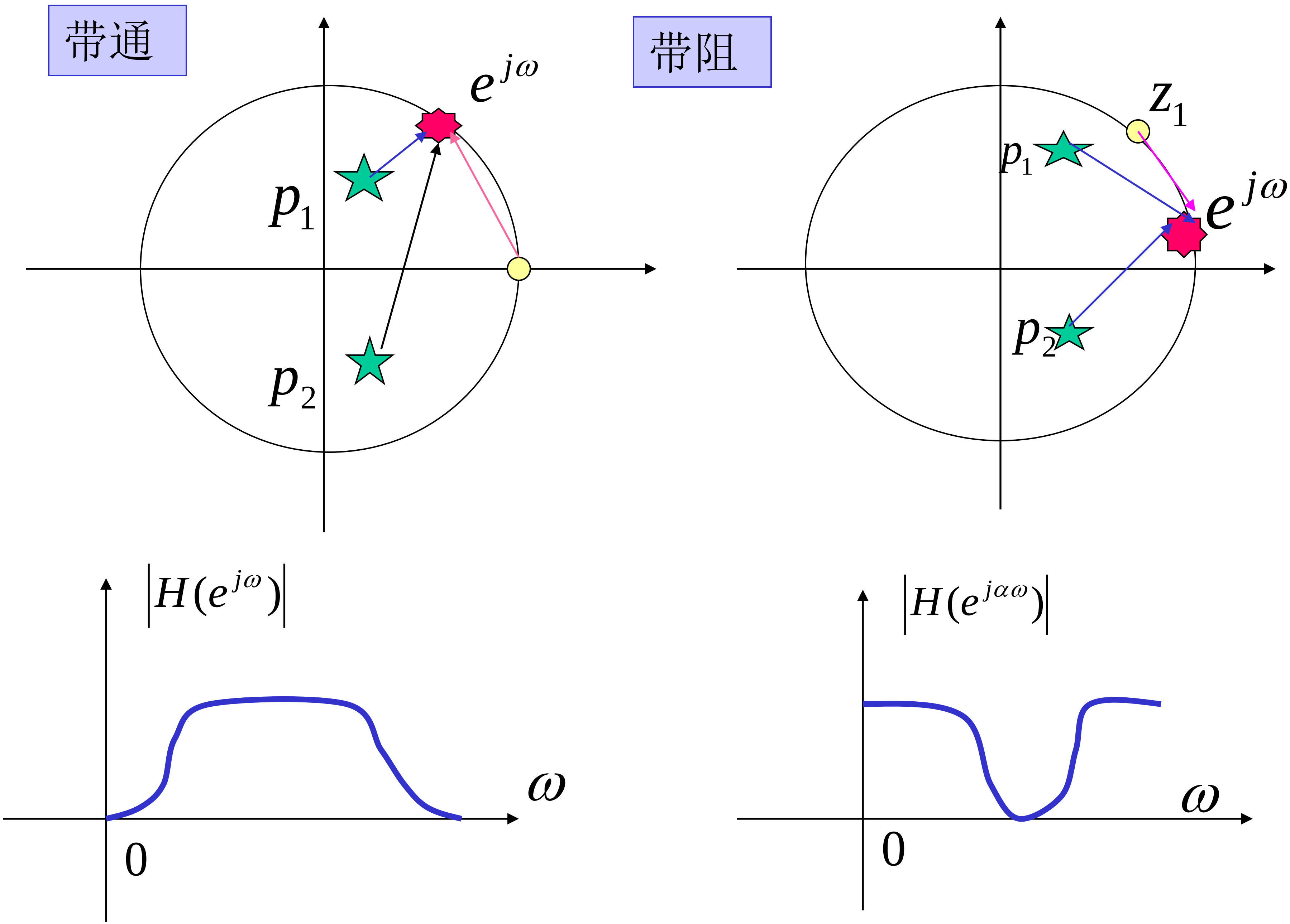


Ding

ECUST

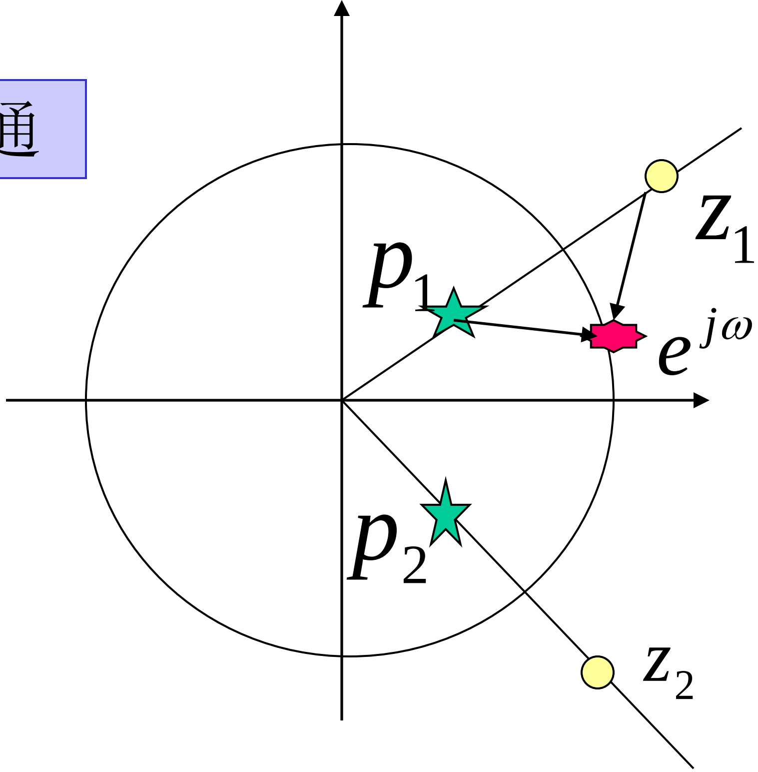

低通
$e^{j\omega}$
p_1
$|H(e^{j\omega})|$
0
$\frac{\omega_s}{2}$
ω

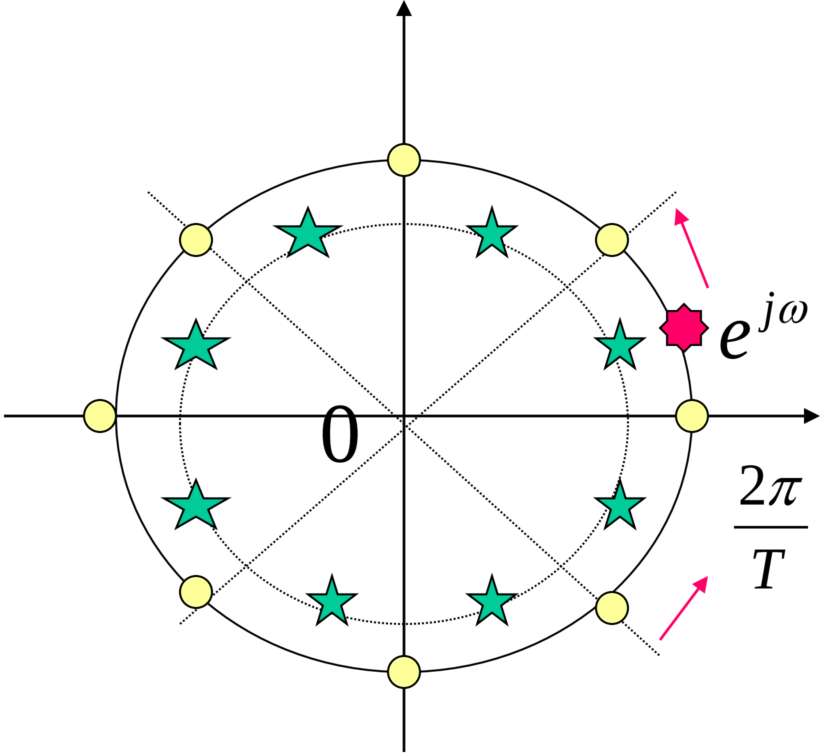

高通
$e^{j\omega}$
p_1
z_1
$|H(e^{j\omega})|$
0
ω



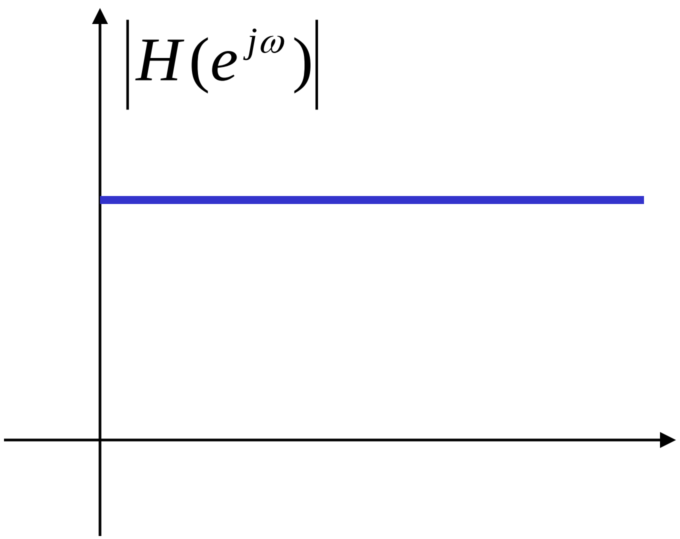
带通
$e^{j\omega}$
p_1
p_2
$|H(e^{j\omega})|$
ω
0
带阻
z_1
p_1
$e^{j\omega}$
p_2
$|H(e^{j\alpha\omega})|$
ω
0

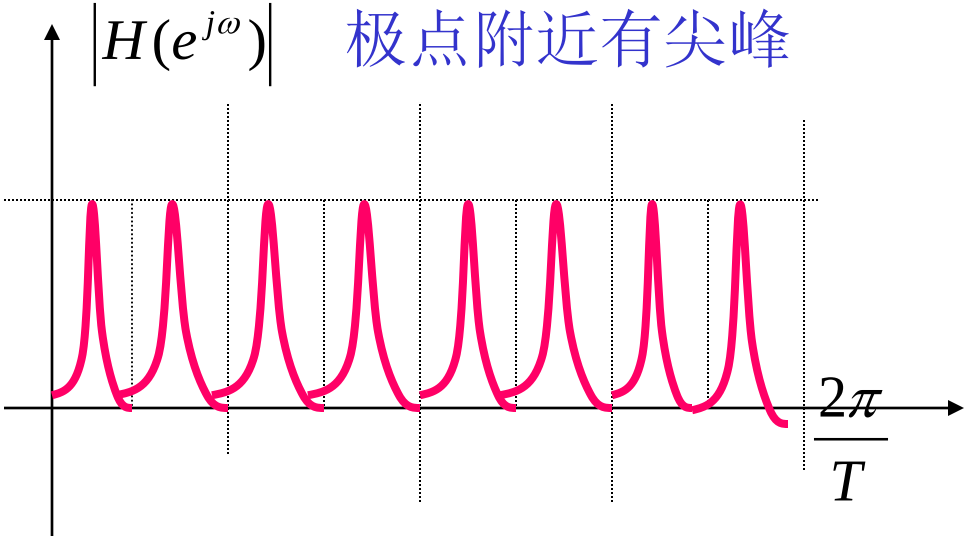
全通



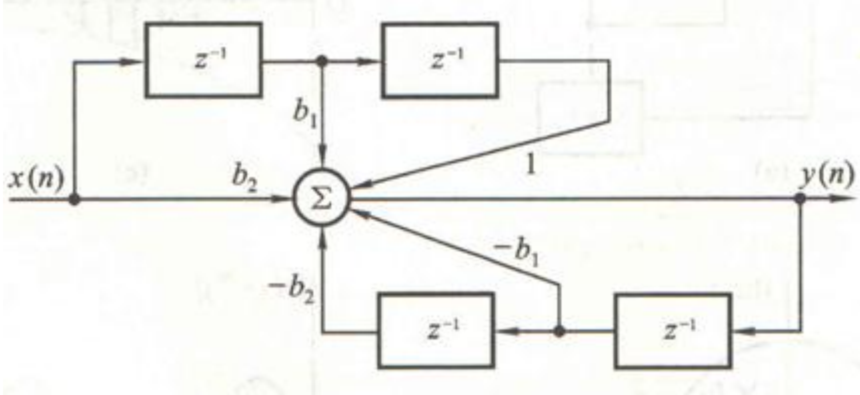


靠近单位圆周的
极点附近有尖峰





例：求图8-21(a)所示离散系统的频率响应。



$$y(n)=x(n-2)+b_1x(n-1)+b_2x(n)-b_2y(n-2)-b_1y(n-1)$$

$$H(z)=\frac{b_2+b_1z^{-1}+z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}=\frac{b_2z^2+b_1z^1+1}{z^2+b_1z^1+b_2}$$

若$b_1^2-4b_2<0$，则$H(z)$具有一对共轭极点和一对共轭零点。

$$H(z)=\frac{b_2\left(z-z_1\right)\left(z-z_1^*\right)}{\left(z-p_1\right)\left(z-p_1^*\right)}$$

令$z_1=r_1e^{j\theta_1}, p_1=r_2e^{j\theta_2}$

$$z_1=\frac{-b_1\pm j\sqrt{4b_2-b_1^2}}{2b_2}$$

$$|z_1|^2=r_1^2=\frac{b_1^2-b_1^2+4b_2}{2b_2^2}=\frac{1}{b_2}$$

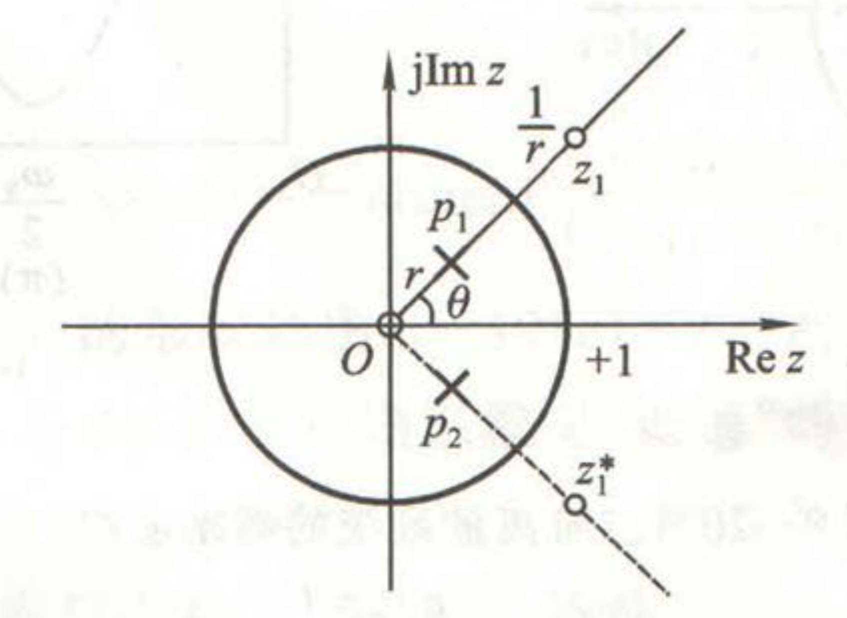
$$p_1=\frac{-b_1\pm j\sqrt{4b_2-b_1^2}}{2}$$

$$|p_1|^2=r_2^2=\frac{b_1^2-b_1^2+4b_2}{4}=b_2$$

$$r_1=\frac{1}{r_2}=\sqrt{b_2},\theta_1=\theta_2=\theta$$

$$z_1=re^{j\theta},z_1^*=re^{-j\theta};$$

$$p_1=\frac{1}{r}e^{j\theta},p_1^*=\frac{1}{r}e^{-j\theta}$$



(b)

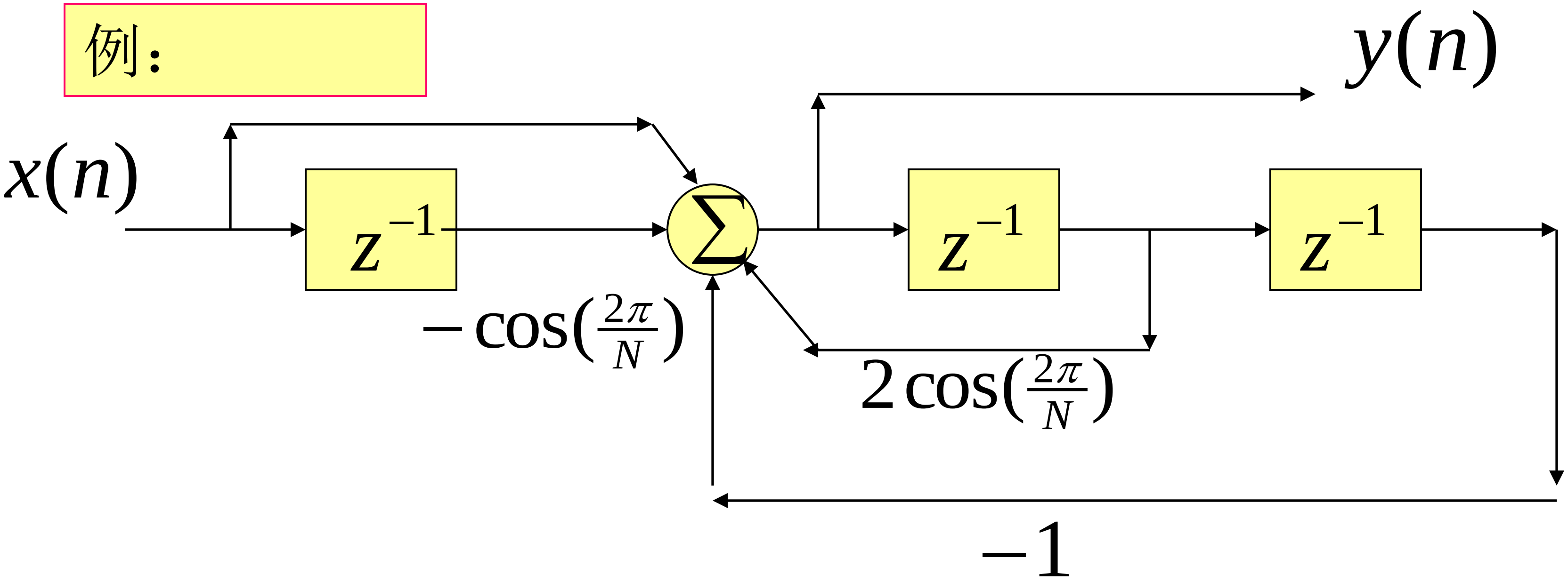
$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{b_2z+b_1+z^{-1}}{z+b_1+b_2z^{-1}}\bigg|_{z=e^{j\omega}}$$

$$=\frac{\left(b_1+\cos\omega+b_2\cos\omega\right)+j\left(b_2\sin\omega-\sin\omega\right)}{\left(b_1+\cos\omega+b_2\cos\omega\right)-j\left(b_2\sin\omega-\sin\omega\right)}$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=1$$

$$\varphi(\omega)=2\arctan\left[\frac{\left(b_2-1\right)\sin\omega}{b_1+\left(b_2+1\right)\cos\omega}\right]$$

例：



$$(1)h(n)=? \quad (2)H(z)=?$$

$$(3)p_k=? \quad z_r=? \quad (4)H(e^{j\omega})=?$$

解

$$y(n)=x(n)-\cos(\frac{2\pi}{N})x(n-1)$$

$$+2\cos(\frac{2\pi}{N})y(n-1)-y(n-2)$$

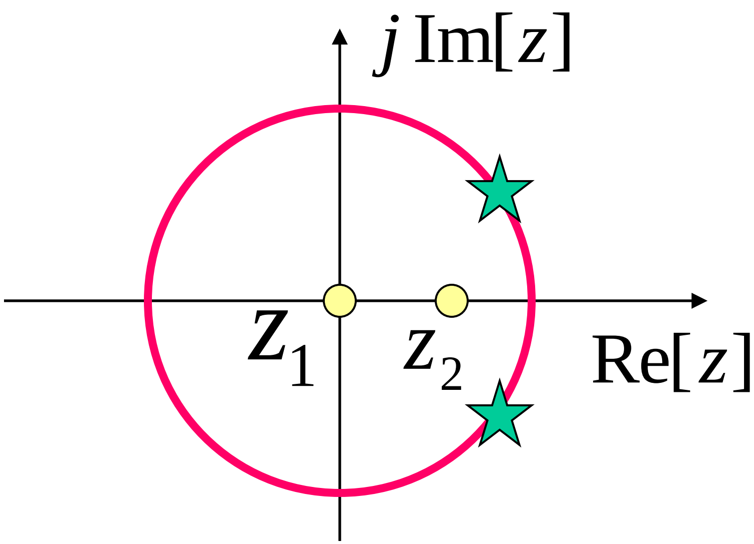
$$H(z)=\frac{1-\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}+z^{-2}}=\frac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{z^{2}-2\cos(\frac{2\pi}{N})z\ \ +1}$$

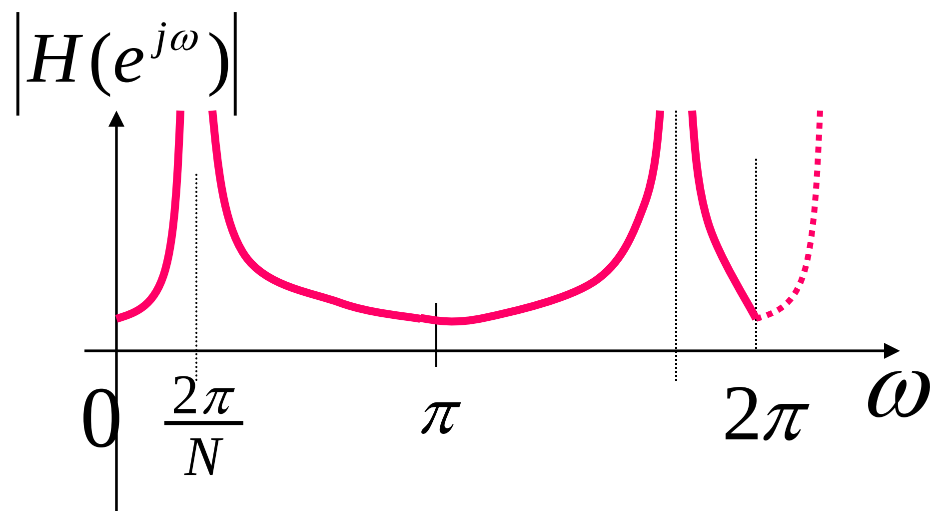
$$=\frac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{(z-e^{j\frac{2\pi}{N}})(z-e^{-j\frac{2\pi}{N}})}$$

$$z_1=0 \quad z_2=\cos(\frac{2\pi}{N})$$

$$p_1=e^{j\frac{2\pi}{N}} \quad p_2=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$h(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)u(n)$$





产生按键式电话机的双音多频信号

例：

已知横向数字滤波器的机构如图所示，试以M=8为例

(1) 写出差分方程；

(2) 求系统函数H(z);

(3) 求单位样值响应h(n);

(4) 画出H(z)的零极图；

(5) 粗略画出系统的幅度响应。

例题

1 利用z平面零、极点矢量作图方法大致画出以下系统函数所对应的幅频响应。

$$H(z)=\frac{z}{z^2-kz+1}$$

k分别为0， 1

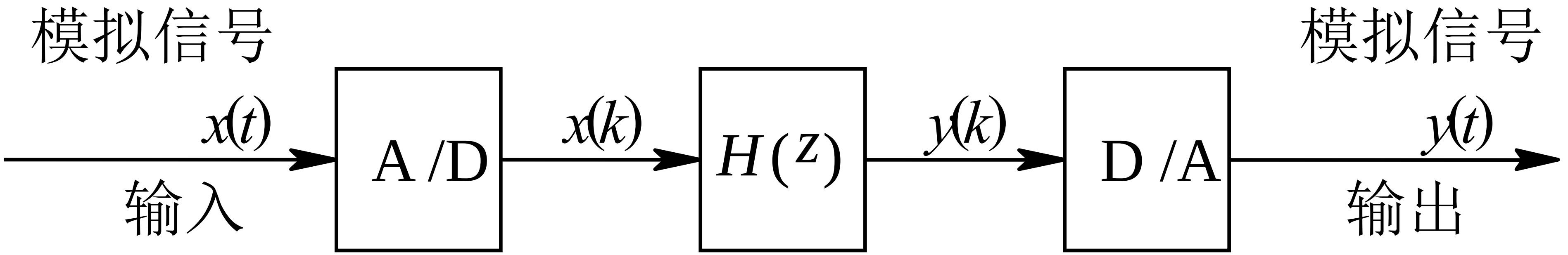
2 一离散时间系统的输出 $y(n)$ 是系统输入 $x(n)$ 的三点移动平均和，即

$$y(n)=\frac{1}{3}[x(n-1)+x(n)+x(n+1)]$$

求：(1) 系统的单位样值响应 $h(n)$。

(2) 系统的频率响应。

包含数字滤波器的混合系统



离散系统频率响应特性小结

1. 系统的频响特性 $H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \left|H(e^{j\omega})\right| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

   $\left|H(e^{j\omega})\right| \sim \omega$：幅频特性，输出与输入序列的幅度之比；

   $\varphi(\omega) \sim \omega$：相频特性，输出对输入序列的相移。

2. 系统的频率响应是系统函数在单位圆上的动态表现，因ω而变化，影响输出的幅度与相位。

3. 因为 $e^{j\omega}$ 是周期为2π 的周期函数，所以系统的频响特性 $H(e^{j\omega})$ 是周期为2π 的周期函数。

4. $\left|H(e^{j\omega})\right|$ 是关于 ω 的偶函数，$\varphi(\omega)$ 是关于 ω 的奇函数。

HW3 (系统的稳定性)

- **8-32**
- **8-33 (1， 2)**
- **8-37**

第六章 Z变换和离散时间系统的Z域分析

复习

- Z变换的基本概念和收敛域

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

ROC (1) 因果序列、右边序列——园外区域，最外层极点的外边

(2) 左边序列——园内区域，最内曾极点的里边

(3) 双边序列——环状

(4) 稳定系统——包含单位园

(5) 稳定因果系统——所有极点在单位园内

•Z变换的基本性质

(1) 时移性质

$$Z[x(n-m)u(n)] = z^{-m}[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}]$$

$$Z[x(n-m)u(n)] = z^{-m}X(z)$$

(2) Z域尺度变换(序列指数加权)

$$Z[a^n x(n)] = X(\frac{z}{a}) \qquad R_{X1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{X2} \quad a\text{为非0常数}$$

(3) Z域微分

$$Z[x(n)] = X(z) \qquad \text{则} Z[n \cdot x(n)] = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

(4) 卷积定理

$$Z[x(n) * h(n)] = X(z) \bullet H(z)$$

- Z逆变换

留数法，部分分式法

注意收敛域对结论的影响

- 利用Z变换解差分方程

利用时移公式，差分方程变代数方程，利用反变换求解。

- 离散系统的系统函数

H（z）——极点分布对稳定性，因果性的影响

——框图进行系统模拟

——根据卷积定理求响应

- 离散系统的频率响应——几何法

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

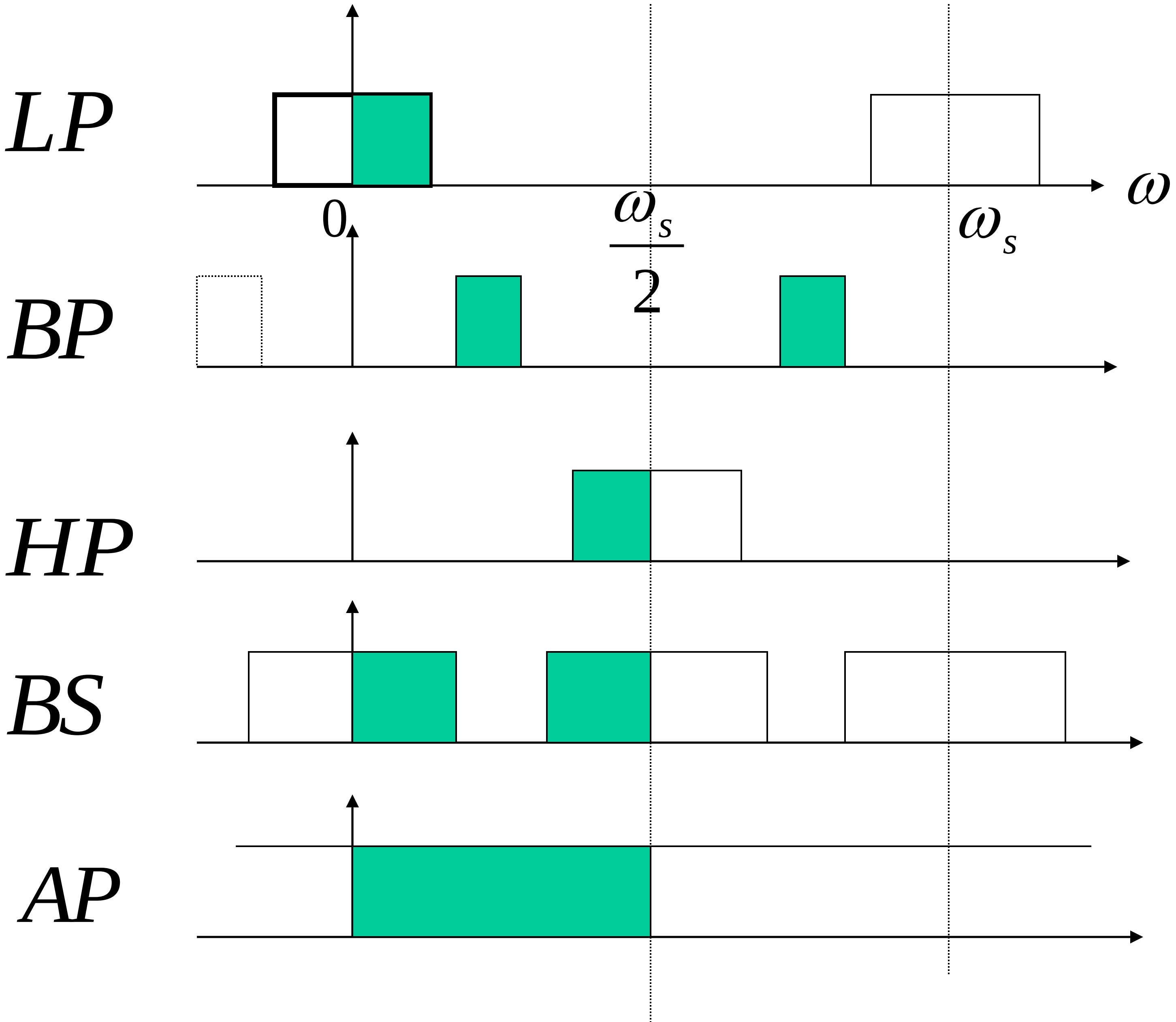
$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{B}{A} e^{j[\theta_2(\omega)-\theta_1(\omega)]}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{B}{A} \qquad \varphi(\omega) = \theta_2(\omega) - \theta_1(\omega)$$

因为$e^{j\omega}$ 是周期的，所以 $H(e^{j\omega})$也是周期的，其周期为重复频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$。

定义二的物理意义

把$H(e^{j\omega})$看成无数个窄带滤波器，每个滤波器的幅频特性是$\left|H(e^{j\omega})\right|$，且对信号有相移作用 $\varphi(\omega)=\theta_2(\omega)-\theta_1(\omega)$ 。


LP
BP
HP
BS
AP
0
$\frac{\omega_s}{2}$
ω_s
ω

二、系统的频率响应的几何确定

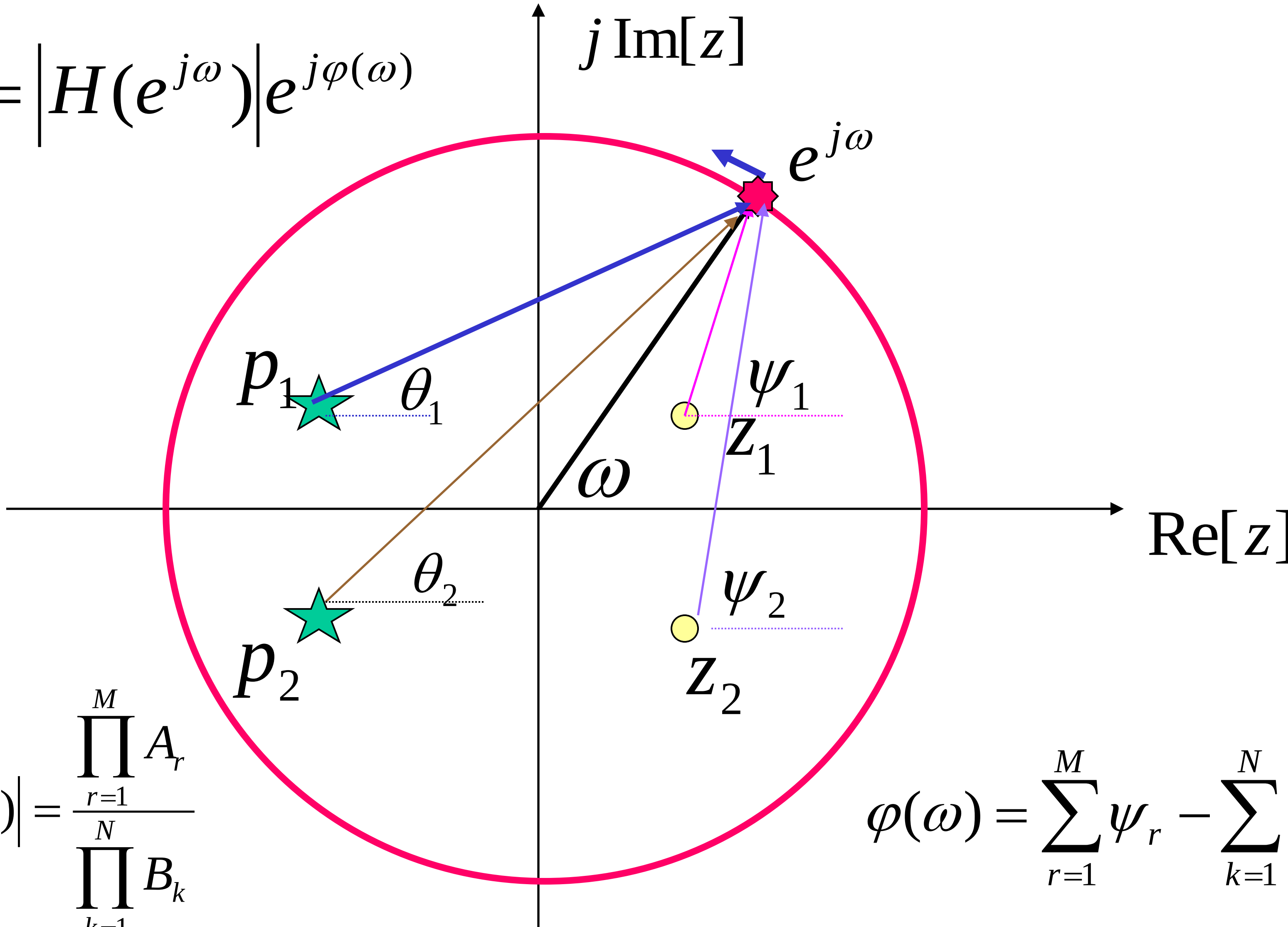
$$H(z)=\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}=\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$e^{j\omega}-z_r=A_r e^{j\psi_r} \qquad e^{j\omega}-p_k=B_k e^{j\theta_k}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{\prod_{r=1}^{M}A_r}{\prod_{k=1}^{N}B_k} \qquad \varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k$$

系统的频率响应的几何确定法

$$H(z)=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$



$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{\prod_{r=1}^{M}A_r}{\prod_{k=1}^{N}B_k}$$

$$\varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k$$